

〈論文〉

## ラムゼイ・ルールの一般形の簡便な導出

橋本 泰明

### A Simple Derivation of the Generalized Form of the Ramsey Rule

Hiroaki Hashimoto\*

#### Abstract

We relax the two main conditions in Hashimoto (2004) in this journal and simplify the derivation of the generalized form of the well-known Ramsey rule. One of the conditions is related to the homogeneity of the utility function and the other, to the constancy of the Hamiltonian. In the present paper, the homogeneous degree of the utility function can be an arbitrary positive number less than one and the constant value of the Hamiltonian can be also arbitrary; the latter serves as the key to simplifying the derivation.

Key Words: Ramsey rule; point transformations; homogeneity; Hamiltonian

JEL Classification: C61; D60

#### 1. はじめに

Ramsey (1928) は変分法を経済学に初めて応用した論文として知られており、その一部のモデル、すなわち効用上限の至福レベルを設けたモデルはブリス・モデルと呼ばれ、後にラムゼイ・ルールと呼ばれる著名な原則を導き出した。この小論の目的は、効用上限の代わりに、今では通常の方法となった割引率を導入し、部門を多部門化して、いわゆるラムゼイ・ルールを一般化した橋本(2004)の結論を、より緩和された条件のもとで、しかも一層簡便な形で導出することにある。橋本(2004)との主な相違は、目的汎関数の中の割引かれる関数を必ずしも一次同次に限らず、1より小の任意の同次性を許容することであり、導出方法の工夫としては、保存則が必ずしもゼロになる必要はなく、任意の一定の値が許容できる点である。

次の節ではラムゼイのブリス・モデルを再現し、さらにこのモデルから労働側面を捨象した一部部門モデルに解析力学の基本定理を適用する。第3節ではこのモデルを、割引率と広義の生産の外部性を持った多部門モデルに拡張して、これに解析力学の基本定理を適用すると、ラムゼイ・ルール

の一般形が得られることを示す。

## 2. ブリス・モデルのラムゼイ・ルール

Ramsey (1928) は効用の上限  $\bar{u}$  を導入し、次のような最小化問題を設定した。

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \int_0^{\infty} (\bar{u} - (u(c(t)) - v(l(t)))) dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{k}(t) = f(k(t), l(t)) - c(t) \text{ given } k(0) = k_0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $u(c(t))$  は消費  $c(t)$  に依存する効用関数であり、 $v(l(t))$  は労働  $l(t)$  に依存する負効用であり、生産関数  $f(k(t), l(t))$  は資本ストック  $k(t)$  にも依存している。関数  $u(c(t))$  および  $f(k(t), l(t))$  については凹性が仮定される。以下、混乱のない限り時間変数を省略する。ラムゼイは

$$dt = (1/(f-c)) dk$$

を使って、目的汎関数を次のように変形した。

$$\int_0^{\infty} (\bar{u} + v(l) - u(c)) dt = \int_{k(0)}^{k(\infty)} \frac{\bar{u} + v(l) - u(c)}{f(k, l) - c} dk \quad (2)$$

式(2)の被積分関数を消費  $c$  について偏微分すれば以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{-u'(f-c) - (\bar{u} - u + v)(-1)}{(f-c)^2} = 0 & \Rightarrow \frac{u'}{(f-c)} = \frac{(\bar{u} - u + v)}{(f-c)^2} \\ \Rightarrow u' = \frac{(\bar{u} - u + v)}{(f-c)} & \Rightarrow u' \dot{k} = \bar{u} - (u - v) \end{aligned} \quad (3)$$

これが現在ラムゼイ・ルールとして広く知られているものである<sup>1)</sup>。

橋本(2004)でも分析されたように、上のモデルの労働側面は本質的ではないので、労働側面を捨象し、問題を最大化問題とて次のように設定する。

$$\text{Max} \quad \int_0^{\infty} (u(c(t)) - \bar{u}) dt \text{ s.t. } \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) \quad (4)$$

<sup>1)</sup> 「貯蓄率と消費の限界効用を乗じたものは、効用の上限から実際の効用を引いたものに常に等しくなければならない。」(Ramsey, 1928, p.547)

問題(4)について、解析力学の概念をいくつか利用するため、経済学者に周知になっているポントリアギンの最大値原理ではなく、次のようにラグランジアン  $L$  を定義し、これを利用する。

$$L = (u(c(t)) - \bar{u}) + \lambda(t) (f(k(t)) - c(t) - \dot{k}(t)) \quad (5)$$

ここで  $\lambda(t)$  は乗数である。

ラグランジアン(5)が時間に陽に依存していないので、解析力学の基本的な定理から、直ちに次のような結果を得る。

**定理** 解析力学のラグランジアン  $L$  が時間に陽に依存しないとき、以下のように定義されるハミルトニアンは最適経路に沿って一定である。

$$H \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{k}} \dot{k} - L = \text{const.} \Rightarrow -(u(c) - \bar{u}) - \lambda(f(k) - c) = \text{const.} \quad (6)$$

**証明** 例えば Lanczos (1970, p.177) 参照。

QED

経済学者におなじみのポントリアギンのハミルトニアンは、(6)とは符号が異なるだけである。式(6)は保存則とも呼ばれる。

保存則(6)は最適経路に沿って成立するものであるから、最適条件である Euler-Lagrange 条件を、消費  $c$  に関して計算すると

$$\frac{\partial L}{\partial c} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{c}} \right) = \frac{\partial L}{\partial c} = 0 \Rightarrow \lambda = u' \quad (7)$$

式(7)および(4)を(6)に代入すれば、保存則の別の形を得る。すなわち

$$\bar{u} - u(c) - u' \dot{k} = \text{const.} \Rightarrow u' \dot{k} = \bar{u} - \text{const.} - u(c) \quad (8)$$

式(8)には定数項があるが、これはラムゼイ・ルール(3)と本質的に同値のものであるといえる。

### 3. ラムゼイ・ルールの一般形の簡便な導出

橋本(2004)に従って、問題(4)を生産の外部性をともなった二部門モデルに拡張し、また割引率  $\rho$  を導入すると、問題はつぎのようになる<sup>2)</sup> (経済変数には大文字を使用している)。

$$\text{Max } \int_0^{\infty} u(C_1(t), C_2(t)) e^{-\rho t} dt \quad (9)$$

$$\text{s.t. } \dot{K}_i(t) = f^i(K_1(t), K_2(t)) - C_i(t) \text{ given } K_i(0), \rho > 0 \quad (i=1, 2) \quad (10)$$

効用関数の同次性  $h$  は橋本(2004)では1に限られていたが、ここでは若干拡張されて、 $0 < h \leq 1$  と仮定される。生産関数  $f^i$  には広義の外部性が仮定されており、しかも一次同次である点は変わらない。上記の問題のラグランジアンは以下のように書かれる。

$$L = u(C_1, C_2) e^{-\rho t} + \sum_{i=1}^2 \lambda_i (f^i(K_1, K_2) - C_i - \dot{K}_i) \quad (11)$$

ラグランジアンが時間に陽に依存しているので、対応するハミルトニアンは一定ではない。そこで、このモデルに内在する保存則を求めるため、橋本(2004)にあるように、解析力学の点変換の概念を使う (Lanczos(1970, p.116))<sup>3)</sup>。つまり、時間以外の変数を次のように変換する。

$$\tilde{C}_i(t) = C_i(t) e^{-(\rho/h)t}, \quad \tilde{K}_i(t) = K_i(t) e^{-(\rho/h)t}, \quad \tilde{\lambda}_i(t) = \lambda_i(t) e^{+(\rho/h)t} \quad (i=1, 2) \quad (12)$$

式(12)を(9)に代入し、効用関数の  $h$  次同次性を使うと

$$\int_0^{\infty} u(C_1, C_2) e^{-\rho t} dt = \int_0^{\infty} u(\tilde{C}_1 e^{(\rho/h)t}, \tilde{C}_2 e^{(\rho/h)t}) e^{-\rho t} dt = \int_0^{\infty} u(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) dt \quad (13)$$

となる。また制約条件(10)は  $f^i$  の一次同次性により、次のように変形される。

$$\dot{\tilde{K}}_i = f^i(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) - (\rho/h)\tilde{K}_i - \tilde{C}_i \quad (i=1, 2) \quad (14)$$

Lanczos (1970, pp.115-119) によれば、問題(9)(10)を解くことは、問題(13)(14)を解くことと同値である。点変換後の問題のラグランジアン  $\tilde{L}$  は次のようになる。

$$\tilde{L} = u(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) + \sum_{i=1}^2 \tilde{\lambda}_i (f^i(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) - (\rho/h)\tilde{K}_i - \tilde{C}_i - \dot{\tilde{K}}_i) \quad (15)$$

2) この種の問題で、効用の上限の代わりに割引率を使うのは Cass (1965)、Koopmans (1965) 以後の常套的方法である。

3) 点変換の投資モデルへの応用については Kataoka and Semba (2002) 参照。

従って、定理(6)により、直ちに次の保存則を得る<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned} \tilde{H} &\equiv \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{K}_i} \dot{K}_i - \tilde{L} = \text{const.} \\ \Rightarrow u(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) + \sum_{i=1}^2 \tilde{\lambda}_i (f^i(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) - (\rho/h)\tilde{K}_i - \tilde{C}_i) &= \text{const.} \\ \Rightarrow u(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) + \sum_{i=1}^2 \tilde{\lambda}_i \dot{K}_i &= \text{const.} \end{aligned} \tag{16}$$

ところで、一部門のプリズ・モデルにおけるラムゼイ・ルール(8)は次のように変形できる。

$$u(c) + \lambda \dot{k} = \bar{u} - \text{const.} \equiv \text{const.} \tag{17}$$

式(16)の第3式と(17)を比較すれば、(16)の第3式が(17)の一般形になっていることは明らかである。なお*i*は任意であることに留意されたい。

横断性条件について付言しておこう。点変換前のモデルの横断性条件は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) K_i(t) = 0 \quad (i=1, 2)$$

であるが、この下では

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_i(t) \tilde{K}_i(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) e^{-(\rho/h)t} K_i(t) e^{-(\rho/h)t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) K_i(t) = 0 \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

となるから、点変換後のモデルの横断性条件も成立している。

#### 4. おわりに

この小論では諸関数の同次性と、生産関数の外部性を前提として、著名なラムゼイ・ルールの一般形を導出した。先行業績と異なる点は、効用関数の同次性の許容範囲が拡張できたことであり、保存則の一定値がゼロのみでなく、任意の一定値で済むことを利用して、導出過程が大幅に簡素化されたことである。

<sup>4)</sup> 時間に陽に依存する項が消えたので、経済学者に周知の方法、つまり最大値原理のハミルトニアン<sup>4)</sup>の時間微分に、Euler-Lagrange条件を適用して、同じ結論を導出することも可能である。

比較された二つのモデルから、積分を収束させる工夫を形式上覆い隠すと、一般形が明確に浮き彫りにされる点は興味深い。つまりプリス・モデルの効用の上限を表面から形式上覆い隠し、また一般化モデルの割引率を、点変換により形式上包み隠すと、二つの保存則の対照的存在が明確になるのである。

(謝辞) 本稿の作成に当たっては、片岡晴雄教授(明星大学)および三浦武男博士(基礎数理研究所)から有益なコメントをいただいた。ここに記して深謝申し上げたい。

### References

- [ 1 ] Cass, D. (1965) "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, 32, pp. 233-240.
- [ 2 ] 橋本泰明 (2004) 「最適成長モデルの保存則による再検討」『亜細亜大学経済学紀要』第28巻第2, 3合併号。
- [ 3 ] Kataoka, H., and K. Semba (2002) "The Neoclassical Investment Model and a New Conservation Law," *Journal of Economics (Zeitschrift für Nationalökonomie)*, Vol. 75, No. 2, pp. 137-160.
- [ 4 ] Koopmans, T. C. (1965) "On the Concept of Optimal Economic Growth," in *The Econometric Approach to Development Planning*, North Holland, pp. 225-287.
- [ 5 ] Lancelotti, C. (1970) *The Variational Principles of Mechanics*, Fourth ed., Dover.
- [ 6 ] Ramsey, F. P. (1928) "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, Dec., pp. 543-559.

\*Professor of Mathematical Economics, Faculty of Economics, Asia University  
hasimoto@asia-u.ac.jp