学習目標の順序づけについて

植　竹　恒　男

The teaching objects are partially ordered both from logical and psychological standpoints, but in the teaching practice, one has to arrange them in a linear order. Prof. Numano has proposed a simple method for doing this[1).

Let $(M, \rightarrow)$ be a finite partially ordered set; elements a, b of M are "teaching objects", and $a \rightarrow b$ will mean that "a should be taught before b". For $a \in M$, $H(a)$, $L(a)$ are defined as Card $\{x \mid a \rightarrow x\}$, Card $\{x \mid x \rightarrow a\}$ respectively. For a, $b \in M$, write $a \sim b$ if $H(a) = H(b)$, $L(a) = L(b)$. The relation $\sim$ is an equivalence relation. For $M/\sim$, we can introduce the linear order as follows. We shall denote with (a) the equivalence class represented by a. Write $(a) \prec (b)$ iff $L(a) < L(b)$, or $L(a) = L(b)$ and $H(a) > H(b)$. This relation $\prec$ is clearly a linear order.

Now the method of Prof. Numano is to arrange the teaching objects according to this linear order, the equivalent objects being arranged arbitarily.

It is remarkable that this simple method can be used with success in a number of cases as Prof. Numano showed in his book.[1] I have noticed, however, that this method may not be successful in several other cases.[2]

I can explain, these successful and unsuccessful examples. More fundamental problem lies, it seems to me, in the choice of "teaching objects".

1. はじめに

ある学習目標を，さらに細かい学習目標に分析して，それらの間の順序関係をつけると，一種の有限順序集合が得られる。すなわち，その集合を **M** とすれば，**M** の元 a, b は学習目標であり，異なる a, b の間の関係

$$a \longrightarrow b$$

は「a は b よりも前に学習しなければならない。」あるいは，「b は a よりも後に学習しなければならない」ことを意味する。順序関係→の定義された集合 **M** を，一般に，(**M**, →) で表す。

特定の学習目標を分析して順序集合 (**M**, →) を作るとき，**M** の元の選び方，順序関係の定め方は，一般に一通りではない。それらは，論理的あるいは心理的な観点から決定される。

(**M**, →) はふつう流れ図として表される。後に挙げる第1図や第2図はその例である。これらの例からもわかるように，(**M**, →) のすべての異なる元 a, b の間で $a \rightarrow b$ が定義されているわけではない。たとえば，第1図で，学習目標①と③の間には順序関係が定められていない。

さて，実際に教える場合には，これらの目標を一列に並べなおさなければならない。すなわち，任意の異なる元 a, b に対して，順序関係が定義されるような，新しい順序関係を定めなければならない。このような順序集合を特に，全順序集合というのである。たとえば，自然数の集合や実数の集合は，それぞれ順序関係

$a < b$ (b は a より大きい)

に関して全順序集合をなしている。

この元来一列に並んでいない内容を一列に並べなおすという操作は，われわれが文章を書いたり，話をしたりする際にも必要である。われわれは，この操作を，ふつうは経験にもとづく一種のカンに頼って遂行しているように見える。

しかし，元の数がきわめて多いような順序集合（**M**, →）についても，われわれのカンは的確に働くであろうか。この操作をカンに頼らないで機械的に実行することはできないものだろうか。本稿は，このような課題に対する一つの試みでもある。

2. 沼野教授の方法の数学的記述

沼野教授は，(**M**, →）に対して，以下述べるような方法で，新しい順序関係<をつくり，全順序集合（**M**, <）をつくることを提案された。(文献(1)) ここでは，それを数学的に表現しておこう。

まず，**M** の元 a について

$$H(a)=Card\ \{x \mid a \to x\}$$

$$L(a)=Card\ \{x \mid x \to a\}$$

と定める。すなわち，$H(a)$ は「a の後で学習する **M** の元の総数」を表し，$L(a)$ は「a の前に学習する **M** の元の総数」を表す。

もし，**M** の異なる元 a, b について

$$H(a)=H(b) \text{ かつ } L(a)=L(b)$$

が成り立てば，そのような a と b の関係を

$$a \sim b$$

と書く。この関係が同値関係であること，すなわち，**M** の元について

（1） $a \sim a$ （反射律）

（2） $a \sim b$ ならば $b \sim a$ （対称律）

（3） $a \sim b$，$b \sim c$ ならば $a \sim c$ （推移律）

がともに成り立つことは明らかであろう。そこで，**M** をこの同値関係によって類別することができる。このようにして得られた同値類の集合を，**M** の ～ に関する商集合といい，**M**/～ と書くのである。

M/～ に属する同値類のうちで，a を代表元とするものを (a) と書くことにしよう。このとき，次のようにして同値類の間の関係≺を導入する。

$L(a)<L(b)$，または $L(a)=L(b)$ かつ $H(a)>H(b)$

が成り立つとき，そのときに限り

$$(a)\prec(b)$$

と定める。くわしくいえば

(1)　$L(a)\neq L(b)$ のとき

$L(a)<L(b)$ ならば $a\prec b$

$L(a)>L(b)$ ならば $a\succ b$

(2)　$L(a)=L(b)$ のとき

$H(a)<H(b)$ ならば $b\prec a$

$H(a)>H(b)$ ならば $b\succ a$

とするのである。(1) は

「前提となる学習内容の数が多いものほどあとにする」ということであり，(2) は，

「前提となる学習内容の数が等しいときは，後に続く学習内容の数が少ないものほどあとにする。」

ということにほかならない。このように定めれば，**M**/～ の任意の異なる元 (a)，(b) について

$$(a)\prec(b)\quad\text{または}\quad(a)\succ(b)$$

のどちらか一方が成りたつ。すなわち，同値類のすべてを関係≺にしたがって“一列に”並べることができる。なお，同じ類に属する元どうしの配列はどのように決めてもよいとしておく。

このような原則にもとづいて学習目標を一列に並べるのが沼野氏の方法であり，この方法による成功例は文献 (1) のなかに挙げられている。

3. 実例1とその考察

第1図は，中学1年の数学の領域A（数・式）における分析例を示す。番号①～⑪をつけた学習目標が，集合 **M** の元であり，その前にある内容は，小学校における学習目標を示し，そのあとにある内容は中学2年の学習目標を示している。しかし，順序集合（**M**, →）としては，一応，前後の学習目標を無視し，破線の中の元（ただし小6の分数の四則，小4の等式の性質も無視）だけを考える。そうすれば，たとえば

$L(①)=0, \qquad H(①)=7$

となる。このようにして，各元について，$L(a)$ と $H(a)$ の値を求め，その結果を第1表のように整理する。この表から容易に，次のような全順序集合が得られる。

③＜①＜④＜⑤＜②＜⑥＜⑨＜⑦＜⑧＜⑩，⑪

⑩と⑪はどちらを先にしてもよい。

この順序づけを，前につけた番号とくらべてみると①，②，⑨の位置が異なっている。この順序づけは果たして妥当であろうか。

まず，①を③と④の間に入れると有理数の導入をしたあとで「整数とその性質」をやることになる。

これは，あまりよい順序づけとはいえない。有理数を導入したらすぐにその四則計算に入るのが数学的にも教育的にもよいと思われるからである。さらにいえば，

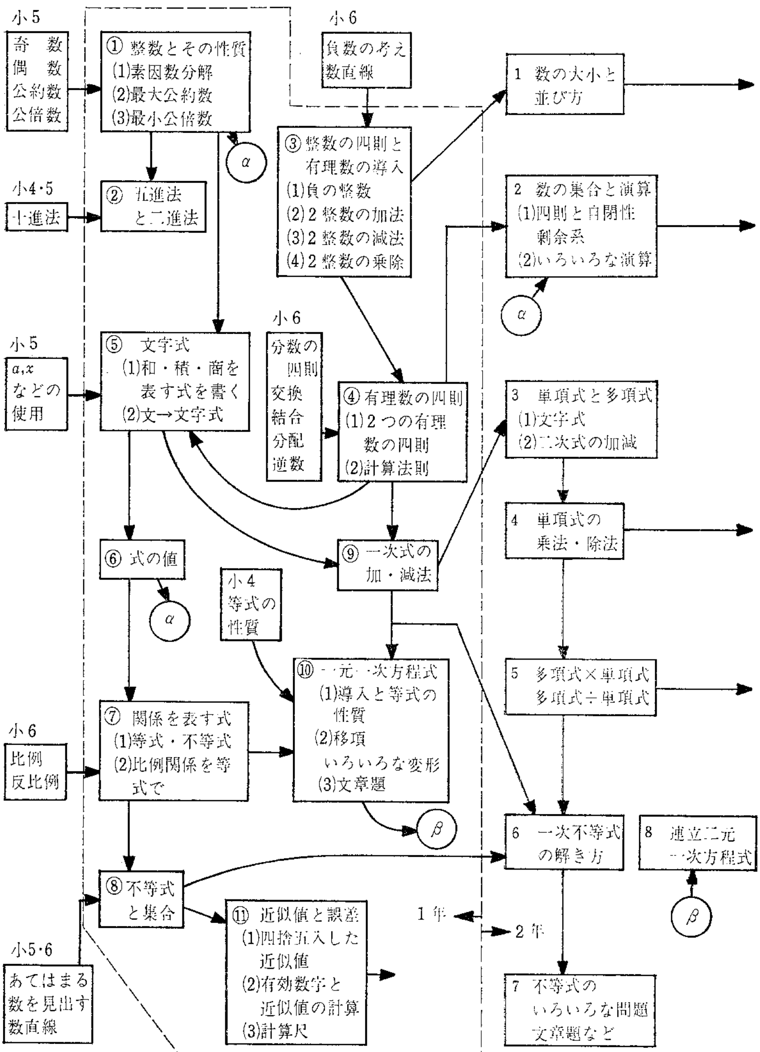
有理数の概念を把握させる。

という学習目標を達成するためには，

有理数の定義が形式的に記述できる。

有理数とそうでないものとを見分ける。

というだけでは充分ではない。その四則計算に関する性質，大小関係に関する性質までも含めて体験的に把握させなければならない。その意味で，


小5
奇数
偶数
公約数
公倍数
① 整数とその性質
(1)素因数分解
(2)最大公約数
(3)最小公倍数
α
小4・5
十進法
② 五進法と二進法
小6
負数の考え
数直線
③ 整数の四則と有理数の導入
(1)負の整数
(2)2整数の加法
(3)2整数の減法
(4)2整数の乗除
1 数の大小と並び方
2 数の集合と演算
(1)四則と自閉性
剰余系
(2)いろいろな演算
α
小5
a,x などの使用
⑤ 文字式
(1)和・積・商を表す式を書く
(2)文→文字式
小6
分数の四則
交換
結合
分配
逆数
④ 有理数の四則
(1)2つの有理数の四則
(2)計算法則
3 単項式と多項式
(1)文字式
(2)二次式の加減
4 単項式の乗法・除法
⑥ 式の値
α
⑨ 一次式の加・減法
小4
等式の性質
⑩ 一元一次方程式
(1)導入と等式の性質
(2)移項
いろいろな変形
(3)文章題
5 多項式×単項式
多項式÷単項式
小6
比例
反比例
⑦ 関係を表す式
(1)等式・不等式
(2)比例関係を等式で
β
6 一次不等式の解き方
8 連立二元一次方程式
⑧ 不等式と集合
⑪ 近似値と誤差
(1)四捨五入した近似値
(2)有効数字と近似値の計算
(3)計算尺
1年
2年
β
小5・6
あてはまる数を見出す
数直線
7 不等式のいろいろな問題
文章題など

第1図

第１表

$L(a)$ \ $H(a)$	0	1	2	3	4	5	6	7
0		②						⑩, ⑪
1					⑨		⑧	
2						⑦		
3								
4					⑥			
5								
6		⑤						
7	①							
8		④						
9	③							

学習目標①の上のような位置づけには欠陥がある。もっとも，この欠陥はむしろ，集合の元の作り方に原因があるのかもしれない。「有理数の導入」を③の内容から④の内容に移せば，除かれるからである。

次に，②の位置はどうであろうか。この目標は，ほかの目標にくらべると比較的独立している。「どこに入れてもよい。」という感じなのである。とはいえ，⑤と⑥の間に割りこむというのはあまりよい形ではない。⑤と⑥は，文字を含む式に関する学習目標であるから，それらの間に，これとは無関係な目標が入ってくるのは，一般には望ましいことではない。一見無関係な目標であっても，⑤の目標を補強し，定着して，次の目標⑥につなぐことができるような扱いができるならば悪くない。しかし，この場合はそのような扱いをするためには，相当な冒険をしなければならない。

最後に，目標⑨の位置については，それほどの欠陥は指摘できないけれども，１次式の加法・減法を１元１次方程式の直前でやりたいという人にとっては不満であろう。このように，第１図の例について，前述のような原則で順序づけを行えば，全体的にみれば妥当な結果が得られるが，目標

①と②の位置については問題が残る。

4.　実例1とその考察（続）

前節では，集合 $(\mathbf{M}, \rightarrow)$ をその前後の目標と切り離して考えたけれども，この節ではそれらの目標も考えに入れた順序づけについて考えてみよう。

いま，$L(a)$ と $H(a)$ の意味を拡張して，$\mathbf{M}$ の元ではないが，その直前，直後にある元の個数までも含めてかぞえることにしよう。第1図について，これを試みると，たとえば

$$L(①)=1,\qquad H(①)=10$$

となる。同様にして，他の元についても，拡張された意味での $L(a), H(a)$ の値を求め，第2表のように整理すれば，次のような順序づけが得られる。

③＜①＜④＜②＜⑤＜⑥＜⑨＜⑩＜⑦＜⑧＜⑪

この結果を前につけた番号とくらべてみると

③，①，④，②　　⑨，⑩，⑦，⑧

のところがちがっている。

前者のグループについては，有理数の導入と四則計算との間に整数とその性質が割り込むことになり，その妥当性についての議論は前節と同様である。

また，後者のグループについていえば，この順序づけにはそれほどの欠点は見受けられない。式を導入したあとで

1次式の加法・減法　　1元1次方程式

という目標群と

関係を表す式，不等式と集合

という目標群のうち，どちらを先にやってもさしつかえないように思われる。

このように，集合 $(\mathbf{M}, \rightarrow)$ の順序づけを，やや大域的 (global) な観点

第2表

$L(a)$ ＼ $H(a)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0				②										⑪
1										⑩				
2												⑧		
3														
4									⑨					
5														
6														
7											⑦			
8														
9									⑥					
10		①												
11														
12								⑤						
13														
14				④										
15		③												

からやりなおしてみると，実例１についてはわりに妥当な結果が得られた。

ところで，学習目標の順序集合は，いつでも，より大域的な順序集合の一部をなしている。上では，直前と直後の元だけを考えたが，それらの前後には，無数の目標があって，たとえば，小学校，中学校，高等学校全体を通じた数学科の学習目標の順序集合を形成している。ここでは，その一部分である中学１年の数と式に関する学習目標の集合について考えた。

もし，$L(a)$ と $H(a)$ の意味をさらに拡張して，直前・直後の元だけでなく，より広い範囲の集合の元の個数もかぞえることにすれば，いろいろ

な順序づけが得られるであろう。たとえば，第2表において，L(②) の値が1つ減り，L(③) の値が2つ増えれば

①＜②＜③＜④

という順序づけが得られる。その意味を第1図についてみれば，目標②の前提となる目標を無視し，目標③の前提となる目標をさらに2つ余分につけ加えるということにほかならない。“余分に”つけ加える目標としては，小学校5年までのものからえらばれるであろう。

しかし，このようにして，より大域的な観点で $L(a)$ と $H(a)$ の値を考えていくと，きわめて大きな値になり，ことによると，**M** の各元の間で，**M** 以外の元による $L(a)$ と $H(a)$ の値への貢献は，互いにほとんど等しいとみなされるかもしれない。その場合は前節で行なったような順序づけでもよいということになる。ただし，この考え方はごく大ざっぱなものであることに注意しよう。

また，「中学校1年の学習目標」というような設定もごく便宜的なものであって，学習指導内容による区分をそのまま利用したにすぎない。それらの目標が中学校1年に対して妥当なものであるか――というようなことはさらに検討されなければならないであろう。

5.　実例2とその考察

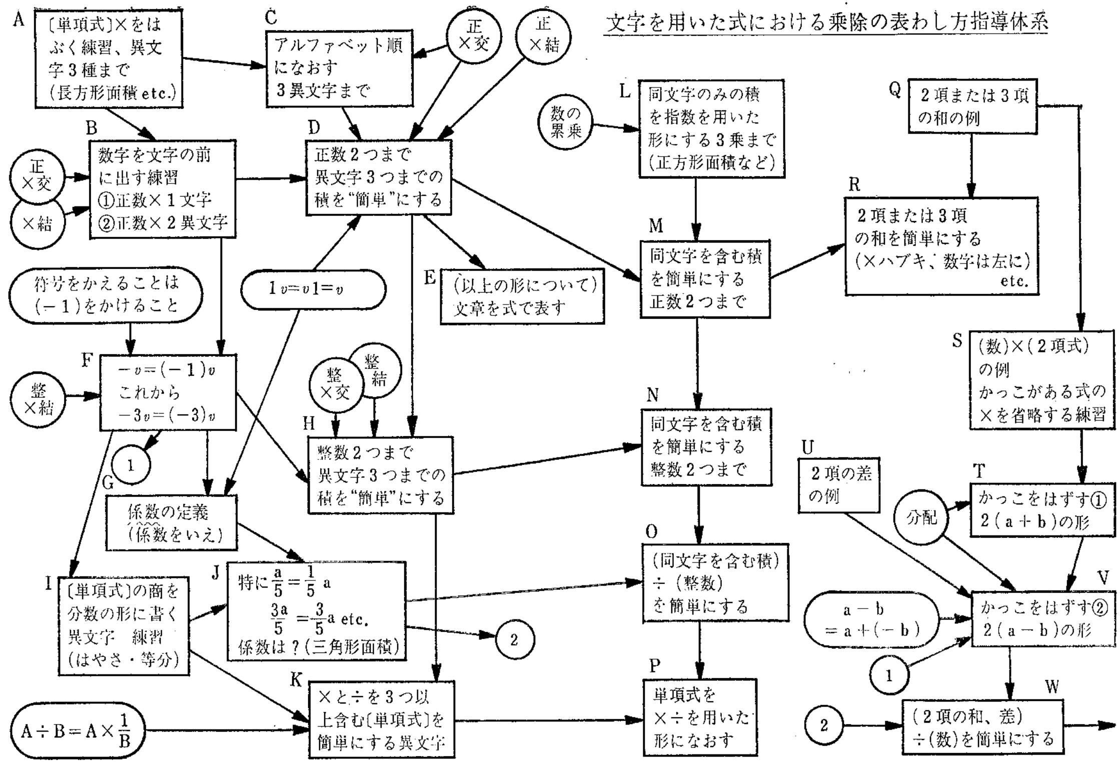
第2図は，第1図における目標⑤をさらに分析して得られた図を示す。ここで，A は

3種までの異なる文字を含む単項式において，演算記号×を省略する。

という目標で，かっこの中は，長方形の面積などを具体例として挙げることを示している。また，B は

単項式において，数字を文字の前に出す。ただし，次の2つのタイプに限る。

①　正数×1文字　　②　正数×異なる2文字の積


文字を用いた式における乗除の表わし方指導体系
A
〔単項式〕×をはぶく練習、異文字3種まで(長方形面積 etc.)
B
数字を文字の前に出す練習
①正数×1文字
②正数×2異文字
C
アルファベット順になおす
3異文字まで
D
正数2つまで
異文字3つまでの
積を"簡単"にする
E
(以上の形について)
文章を式で表す
F
$-v=(-1)v$
これから
$-3v=(-3)v$
G
係数の定義
(係数をいえ)
H
整数2つまで
異文字3つまでの
積を"簡単"にする
I
〔単項式〕の商を分数の形に書く
異文字　練習
(はやさ・等分)
J
特に$\frac{a}{5}=\frac{1}{5}a$
$\frac{3a}{5}=\frac{3}{5}a$ etc.
係数は？(三角形面積)
K
×と÷を3つ以上含む〔単項式〕を簡単にする異文字
L
同文字のみの積を指数を用いた形にする3乗まで(正方形面積など)
M
同文字を含む積を簡単にする
正数2つまで
N
同文字を含む積を簡単にする
整数2つまで
O
(同文字を含む積)÷(整数)を簡単にする
P
単項式を×÷を用いた形になおす
Q
2項または3項の和の例
R
2項または3項の和を簡単にする
(×ハブキ、数字は左に)
etc.
S
(数)×(2項式)の例
かっこがある式の×を省略する練習
T
かっこをはずす①
2(a+b)の形
U
2項の差の例
V
かっこをはずす②
2(a−b)の形
W
(2項の和、差)÷(数)を簡単にする
正×交
正×結
整×交
整×結
×結
数の累乗
分配
符号をかえることは(−1)をかけること
$1v=v1=v$
$A\div B=A\times\frac{1}{B}$
$a-b=a+(-b)$
1
2

第2図

第3表

$H(b)$ \ $L(a)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0					E								P
1			K										O
2			J										
3				G									
4	L			I									
5				M	H								
6													
7				D									
8		C	N										
9			F										
10													
11													
12													
13		B											
14													
15	A												

という目標である。C 以下についても同様である。

また，長方形以外の枠内に書かれた目標は，小学校などにおける既習事項で，たとえば

正×交　　整×結

はそれぞれ

正の数の乗法に関する　交換法則

整数の乗法に関する　結合法則

を示している。

第2図で表された順序集合のうち，A から P までの元から成る順序集

合を（**M**, →）とみなし，すでに述べた原則にしたがって順序づけを行えば，次のような結果が得られる。（第３表参照）

A≺L≺B≺C≺F≺N≺J≺K≺D≺M≺I≺G≺H≺E≺O≺P

ただし，$H(a)$，$L(a)$ としては狭義のほうをえらんだ。次に，既習事項も考慮して順序づけを行なえば

A≺L≺B≺C≺D≺F≺G≺H≺I≺E≺M≺J≺N≺K≺O≺P

となる。最初のアルファベット順はいうまでもなくカンに頼って決めたものであるが後者のほうがよりアルファベット順に近いことがみてとれるであろう。ただし，アルファベット順になっていないからといって，“悪い”順序であるとはいえないことは実例１の場合と同様である。

たとえば，上の順序づけでは，どちらも A と B の 間に L が入っているが，目標 L は

同じ文字のみの積を指数を用いた形になおす。

（３乗まで，正方形の面積などを具体例として）

であって，これを最初のほうで学習させるという体系も成り立ち得るのである。しかし，前者のように，D の

正数を２つまで，異文字を３つまで含む積を簡単にする。

という目標が K（×と÷を含む場合）のあとにくるような順序づけはあまりよいとはいえない。また，目標 E の位置については，この両者の 順序づけのどちらについても問題がある。E の

以上の形について，文章を式で表す。

という表現は明らかに，目標 A, B, C, D を受けているからである。

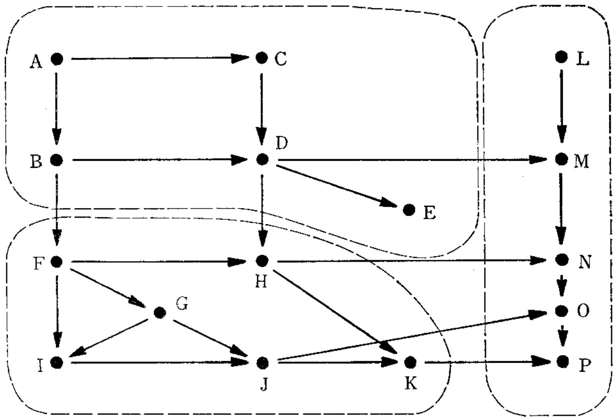
ところが，もし，集合 **M** を

{A, B, C, D, E}　　{F, G, H, I, J, K}　　{L, M, N, O, P}

の３つの集合に分け，そのおのおのについて，前述のような順序づけを行なえば

A≺B≺C≺D≺E

F≺G≺H≺I≺J≺K



第3図

$$L \prec M \prec N \prec O \prec P$$

のような結果が得られ，カンによる順序づけと一致してしまう。カンに頼って順序を決めるときに，このようなグループ分けを無意識のうちに行なっていたのであろうか。（第3図）

いずれにしても与えられた順序集合を適当に分割することによって，より“自然な”順序づけを行なうことができる場合があることが示されたわけである。

6.　お わ り に

いずれにしても，本文で述べたような原則で1列に並んでいなかったものを1列に並べ変える――というような方法は，随分乱暴なやりかたであるといえる。この方針にしたがって得られた順序づけが必ずしも妥当なものになっていないのは当然のことではないか――という人もいるだろう。

順序集合という見方は，それ自体，集合の元が具体的にどのようなものであるかというようなことには無関係である。まして，その順序集合の作り方が，内容的にみて妥当なものであるかということは，いっさい関知し

ない。そのような“内容”を無視して強引に全順序集合になおすのであるから，巧くいかない場合があっても不思議はない。

しかし，それにもかかわらず，$H(a)$ と $L(a)$ の値をかぞえあげていくというやりかたには，それなりの合理性があり，やりようによっては，われわれのカンと一致する結果が得られることが本文で示されたのである。

われわれは今までカンによる順序づけに頼ってきた。しかし，このようにして得られた順序づけが最良のものであるという保証は何もない。しかも，人間に与えられるべき情報の量は加速度的に増加しつつあり，将来もカンだけで処理していけるかどうかわからない。そのようなとき，形式的な処理と人間の判断とを併用することが必要になるかもしれない。

また，教育目標の順序づけに関する限り，唯一絶対の体系というものは存在しないであろう。ある順序づけの妥当性を裏づけるものは，一つには学問的な体系であり，一つには教育的な実践である。そして，ある生徒に対して成功したからといって，他の生徒に対しても成功するといった類(たぐい)のものではない。

既成の体系にとらわれることなく，いろいろな体系を作ってはそれを試みる――ということも必要であろう。

最後に，本文で述べたような数学的な方法は，教育の分野だけでなく，他の分野においても利用できる可能性があることに注意しておこう。

たとえば，人間の言語というものは，全順序集合の形で表されているが，表すべき“内容”は必ずしも全順序集合にはなっていないで時間的に，あるいは空間的に部分的な順序の定められた，順序集合の元になっている。それをいささか強引に１列に並べて文章を作るわけだが，その際にどのような法則がはたらいているのであろうか。いろいろな国の言語における語順のちがいなどを研究する場合にも本文のような考え方は役に立つかもしれない。この場合は，$H(a)$ や $L(a)$ に相当する値は，一種のウェイトで代用されるかもしれない。あるいは，すでにそのような研究は存在するかもしれないが，御教示いただければありがたい。

有限集合の順序づけに関する理論は近年グラフ理論などとも関連しながら発達しつつあるが，この方法は，他の分野においても試みてみる価値があるように思われる。

本稿がそのような試みへのいとぐちになればこれ以上の幸いはない。

文　献

1) 沼野一男：新訂プログラム学習の実践（悠久出版）1968
2) 植竹恒男：ティーチングマシン（近代新書）1968
3) 植竹恒男：数学科のための Learning Laboratory System とその理論について．亜細亜大学教養部紀要第11号，1975
4) 同上英文，Reports of ICME-JSME, 1975（日本数学教育学会）
5) 植竹恒男：現代の数学——その基本的な方法（近代新書），1966
6) R. G. Busacker, T. L. Saaty; Finite Graphs and Networks (McGraw-Hill), 1965. 邦訳は培風館，1970

（本稿は，Karlsruhe における第3回国際数学教育会議で行なった発表に加筆したものである。）