【研究ノート】

非累積的優先株式の評価について+*

久　保　俊　郎

Valuation of Non-cumulative Preferred Stock

KUBO, Toshiro

Abstract

This note studies the valuation of preferred stock. Assuming that cash flow from a corporate asset follows a geometric Brownian motion and risk neutral probability can apply, I derived the explicit valuation formula of various types of non-cumulative preferred stocks. Usually the corporate asset valuation uses a differential equation technique. This note takes an alternative and rather simple approach.

要　約

本稿は会社資産からのキャッシュフローが幾何ブラウン運動に従い，リスク中立確率を用いることができるという前提のもとで，さまざまな形態の（非累積的）優先株式の明示的な評価式を導出した。通常の資産評価では，微分方程式を解くやり方で評価式を導出するが，ここではより初等的な方法で導出している。

Key Words

preferred stock, valuation, conversion (or put), call, geometric Brownian motion

キーワード

優先株式，評価，取得請求，取得，幾何ブラウン運動

目　　次

+本稿は2009年日本経営財務研究学会東日本部会で発表したものです。コメンテータの八木恭子先生（当時東京大学金融教育研究センター）ならびに岩城秀樹先生（当時京都大学）から貴重なご意見を頂戴しました。今少しブラッシュアップを，と思いながら時間ばかり経過し，両先生には申し訳なく思っております。もちろん誤りは筆者のものです。

＊二瓶喜博先生の退職記念号に寄せて。マーケティングは勿論門外漢ですが，貨幣，取引，市場などについて社会学，人類学などの深い教養をベースにそれをマーケティングに反映させていこうというお考えをお持ちではなかったかと勝手に推察しております。私ごときが申し上げるのも何ですが，その「志の高さ」がご業績のみならず，先生の立ち振る舞いにまで映し出されているのではと思っております。いつぞや教務主任として全国経営学部長会議で北海道にご一緒させていただいたことが懐かしく思い出されます。機会がありましたら，またお話しさせてください。何かの記念にと思い拙稿を載せさせていただきました。

1．はじめに

会社の既存資産からのキャッシュフローが幾何ブラウン運動に従うものとし，さらに無裁定状態を前提にリスク中立確率が使えるとして，さまざまな形態の優先株式の評価を行うことが本稿の目的である。通常の株式や負債の評価では企業価値のプロセスを仮定するが，ここでは会社の資産が生み出すキャッシュフローの過程を所与としている。そうすることで直感的に分かりやすく，かつまたこの種の評価に伴っている希薄化の問題その他を回避できたと考えている。ところで，通常の評価論ではファイマン・カックの公式から微分方程式を解いて評価式を導く。本稿では微分方程式を解くことなく，より初等的に導出する方法を展開している。

次の2において，基礎となる一般的な資産の評価論を展開している。3において，それを応用してさまざまなタイプの優先株式の評価を行っている。4では負債がある企業での優先株式の評価を行っている。

2．モデルと評価方法

(1)　基本モデル

会社の既存資産からのキャッシュフロー p_tは幾何ブラウン運動に従って連続的に変化するものとする。

$$dp_t = \alpha p_t dt + \sigma p_t dz$$

ここに dz は標準ウィナー過程の増分である。

投資家によるリスクを考慮した適当な割引率 ω を用いて，t 期の配当額がそのときのキャッシュフローの値 p_tの関数として $d(p_t)$ と書ける場合の資産の価値は，

$$E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-\omega t} d(p_t)\,dt\right]$$

と表すことができる(1)。$E_{p_0}[\cdot]$は，0期のキャッシュフロー p_0のときの期待値演算子である。ここで，無裁定状態における等価リスク中立確率による評価法を利用できるとする。無危険利子率を r とすると，上の評価問題は，

$$dp_t = (r-\delta)\,p_t dt + \sigma p_t dz$$

のもとで，

$$E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt} d(p_t)\,dt\right]$$

の評価を行うことに等しい。ここに，δ は会社資産の期待収益率である μ からドリフト項 α を差し引いた値であり，$\delta = \mu - \alpha$ で与えられるものである(2)。δ はリスクを評価した割引率であり，確実性下の一定配当成長モデルから類推できるように，これが正でないと有限の価値は求まらな

い。この値はモデルにとって重要な定数である。

さて，フビニの定理を使い上の積分の順序を入れ替える。この定理が成立する数学的な条件は満たされているものとする。

$$U(p_0)=E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}d(p_t)\,dt\right]$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-rt}d(p_t)f(t,p_0,p_t)\,dtdp_t$$

$$=\int_0^\infty d(p_t)\left(\int_0^\infty e^{-rt}f(t,p_0,p_t)\,dt\right)dp_t$$

と書き換え，$h(p_0,p_t)=\int_0^\infty e^{-rt}f(t,p_0,p_t)\,dt$ を計算する。ここに，$f(t,p_0,p_t)$は，$t=0$ において，p_0であったものが，t 期（間後）において，p_tとなる確率である。結果として，これは以下のように簡明に与えられる。

$$h(p_0,p_t)=\begin{cases}\dfrac{1}{J}p_0^{R_1}p_t^{-(1+R_1)} & p_t\geq p_0\\ \dfrac{1}{J}p_0^{R_2}p_t^{-(1+R_2)} & p_t<p_0\end{cases}$$

ここに，

$$J=\sqrt{(r-\delta-0.5\sigma^2)^2+2r\sigma^2}$$

である。また，

$$R_1=\frac{-(r-\delta-0.5\sigma^2)+J}{\sigma^2},$$

$$R_2=\frac{-(r-\delta-0.5\sigma^2)-J}{\sigma^2}$$

である。証明は付録１を参照いただきたい。

この結果を用いて，

$$U(p_0)=\int_0^\infty d(p_t)\,h(p_0,p_t)\,dp_t$$

$$=\left(\frac{1}{J}\right)\left\{\int_0^{p_0}d(p_t)\,p_0^{R_2}p_t^{-(1+R_2)}dp_t+\int_{p_0}^\infty d(p_t)\,p_0^{R_1}p_t^{-(1+R_1)}dp_t\right\}$$

となる(3)。

(2) 特殊ケース

(i)　一定の債務（$d(p_t)=\mathrm{c}$）の評価

$$E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}c\,dt\right]=\frac{1}{J}\left\{\int_0^{p_0}cp_0^{R_2}p_t^{-(1+R_2)}dp_t+\int_{p_0}^\infty cp_0^{R_1}p_t^{-(1+R_1)}dp_t\right\}$$

$$=\frac{c}{J}\left(-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)=\frac{c}{J}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}=\frac{c}{J}\frac{\left(-\frac{2J}{\sigma^2}\right)}{\left(-\frac{2r}{\sigma^2}\right)}$$

$$=\frac{c}{r}$$

これは直接的に積分して計算できるが，ここでの方法の正しさを確認するために計算している。

(ii)　企業価値（$d(p_s)=p_s$）の評価

$$E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}p_t dt\right]=\frac{1}{J}\left\{\int_0^{p_0}p_0^{R_2}p_t^{-(1+R_2)}p_t dp_t+\int_{p_0}^\infty p_0^{R_1}p_t^{-(1+R_1)}p_t dp_t\right\}$$

$$=\frac{1}{J}\left\{\frac{p_0}{1-R_2}-\frac{p_0}{1-R_1}\right\}=\frac{p_0}{J}\frac{R_2-R_1}{1-(R_1+R_2)+R_1R_2}=\frac{p_0}{J}\frac{-\frac{2J}{\sigma^2}}{1+\frac{r-\delta-0.5\sigma^2}{0.5\sigma^2}-\frac{r}{0.5\sigma^2}}$$

$$=\frac{p_0}{\delta}$$

である。確実性下の一定成長モデルから類推できる結果になっている。これより資産からのキャッシュフローと企業価値は 1 対 1 に対応していることを確認しておく。すなわち，企業価値も同じ幾何ブラウン運動に従う。

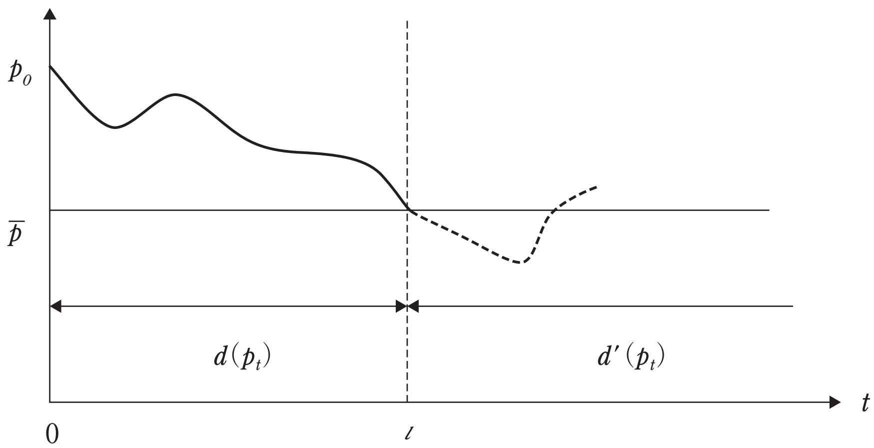
(3) ある閾値で配当の支払い形態が転換するモデル

(i) ひとつの閾値で転換する場合

次に，キャッシュフローがある値$\bar{p}$に最初になったときに配当支払いの形態が変化する株式の評価を行う。$\tau=\inf\{t\,;p_{\mathrm{t}}=\bar{p}\}$ であるとする。

$$\bar{U}(p_0)=E_{p_0}\left[\int_0^\tau e^{-rt}d(p_t)\,dt+\int_\tau^\infty e^{-rt}d'(p_t)\,dt\right]$$

$$=E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}d(p_t)\,dt+\int_\tau^\infty e^{-rt}(d'(p_t)-d(p_t))\,dt\right]$$



と書ける。

$$\overline{U}(p_0)=E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}d(p_t)\,dt+\int_\tau^\infty e^{-rt}(d'(p_t)-d(p_t))\,dt\right]$$

$$=E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}d(p_t)\,dt+e^{-r\tau}\int_0^\infty e^{-rt}(d'(p_t)-d(p_t))\,dt\right]$$

$$=E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}d(p_t)\,dt\right]+E_{p_0}[e^{-r\tau}]E_{\overline{p}}\left[\int_0^\infty e^{-rt}(d'(p_t)-d(p_t))\,dt\right]$$

と変形でき，ここに，

$$E_{p_0}[e^{-r\tau}]=\begin{cases}\left(\dfrac{p_0}{\overline{p}}\right)^{R_1} & \overline{p}\geq p_0\\ \left(\dfrac{p_0}{\overline{p}}\right)^{R_2} & \overline{p}<p_0\end{cases}$$

と与えられる(4)。結果的に，

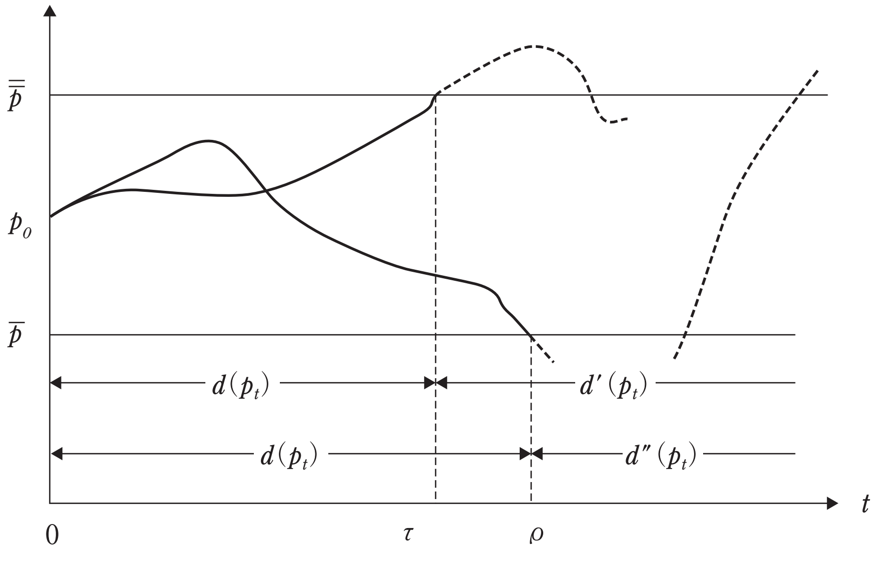
$$\overline{U}(p_0)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty d(p_t)\,h(p_0,p_t)\,dp_t+\left(\frac{p_0}{\overline{p}}\right)^{R_1}\left(\int_0^\infty (d'(p_t)-d(p_t))\,h(\overline{p},p_t)\,dp_t\right) & \overline{p}\geq p_0\\ \displaystyle\int_0^\infty d(p_t)\,h(p_0,p_t)\,dp_t+\left(\frac{p_0}{\overline{p}}\right)^{R_2}\left(\int_0^\infty (d'(p_t)-d(p_t))\,h(\overline{p},p_t)\,dp_t\right) & \overline{p}<p_0\end{cases}$$

を計算すればいいことがわかる。

(ii) 2つの閾値で配当の支払い形態が転換する場合

$\overline{p}\leq p_0\leq\overline{\overline{p}}$とする。$p_0$を発して，キャッシュフローの水準が$\overline{\overline{p}}$に達する前に$\overline{p}$に最初に到達したとき，配当支払いの形態が $d(\cdot)$から $d'(\cdot)$に変化するとする。$\rho=\inf\{t;\,p_t=\overline{p}\}$ とおく。また，キャッシュフローの水準が$\overline{p}$に達する前に$\overline{\overline{p}}$に最初に到達したとき，配当支払い形態が $d(\cdot)$から $d''(\cdot)$に変化するとする。$\tau=\inf\{t\,;\,p_t=\overline{\overline{p}}\}$ とおく。

$\rho\wedge\tau=\min\{\rho,\tau\}$ と記すとすれば，この株式の価値は，



$$\overline{\overline{U}}(p_0)=E_{p_0}\left[\int_0^{\rho\wedge\tau}e^{-rt}d(p_t)\,dt+\int_{\rho\wedge\tau}^{\infty}e^{-rt}(d''(p_t)1_{\{\rho\leq\tau\}}+d'(p_t)1_{\{\tau\leq\rho\}})\,dt\right]$$

と表せる。ここに$1_{\{\cdot\}}$は$\{\cdot\}$内の条件が満たされているとき，1，そうでないとき，0となる関数である。これは，

$$\overline{\overline{U}}(p_0)=E_{p_0}\left[\int_0^{\infty}e^{-rt}d(p_t)\,dt\right]+E_{p_0}[e^{-r\rho}1_{\rho\leq\tau}]E_{\overline{p}}\left[\int_0^{\infty}e^{-rt}(d''(p_t)-d(p_t))\,dt\right]$$

$$+E_{p_0}[e^{-r\tau}1_{\tau\leq\rho}]E_{\overline{\overline{p}}}\left[\int_0^{\infty}e^{-rt}(d'(p_t)-d(p_t))\,dt\right]$$

と書き換えられる。ここに，

$$E_{p_0}[e^{-r\rho}1_{\rho\leq\tau}]=\frac{p_0^{R_1}\overline{\overline{p}}^{R_2}-\overline{\overline{p}}^{R_1}p_0^{R_2}}{\overline{p}^{R_1}\overline{\overline{p}}^{R_2}-\overline{\overline{p}}^{R_1}\overline{p}^{R_2}}=\frac{p_0^{R_2}\overline{\overline{p}}^{R_1-R_2}-p_0^{R_1-R_2}}{\overline{p}^{R_2}\overline{\overline{p}}^{R_1-R_2}-\overline{p}^{R_1-R_2}},$$

$$E_{p_0}[e^{-r\tau}1_{\tau\leq\rho}]=\frac{\overline{p}^{R_1}p_0^{R_2}-p_0^{R_1}\overline{p}^{R_2}}{\overline{p}^{R_1}\overline{\overline{p}}^{R_2}-\overline{\overline{p}}^{R_1}\overline{p}^{R_2}}=\frac{p_0^{R_2}p_0^{R_1-R_2}-\overline{p}^{R_1-R_2}}{\overline{\overline{p}}^{R_2}\overline{\overline{p}}^{R_1-R_2}-\overline{p}^{R_1-R_2}},$$

で与えられる(5)。これより，

$$\overline{\overline{U}}(p_0)=\int_0^{\infty}d(p_t)\,h(p_0,p_t)\,dp_t+\frac{\overline{p}_0^{R_1}p^{R_2}-p^{R_1}\overline{p}_0^{R_2}}{\overline{p}^{R_1}\overline{\overline{p}}^{R_2}-\overline{\overline{p}}^{R_1}\overline{p}^{R_2}}\int_0^{\infty}(d''(p_t)-d(p_t))\,h(\overline{p}_0,p_t)\,dp_t$$

$$+\frac{\overline{p}^{R_1}p_0^{R_2}-p_0^{R_1}\overline{p}^{R_2}}{\overline{p}^{R_1}\overline{\overline{p}}^{R_2}-\overline{\overline{p}}^{R_1}\overline{p}^{R_2}}\int_0^{\infty}(d'(p_t)-d(p_t))\,h(\overline{\overline{p}},p_t)\,dp_t$$

となる。$\varphi(x,y)=\dfrac{p_0^{R_1}y^{R_2}-y^{R_1}p_0^{R_2}}{x^{R_1}y^{R_2}-y^{R_1}x^{R_2}}$とおくと，$E_{p_0}[e^{-r\rho}1_{\rho\leq\tau}]=\varphi(\overline{p},\overline{\overline{p}}),E_{p_0}[e^{-r\tau}1_{\tau\leq\rho}]=\varphi(\overline{\overline{p}},\overline{p})$となることに注意しておく。整理して，

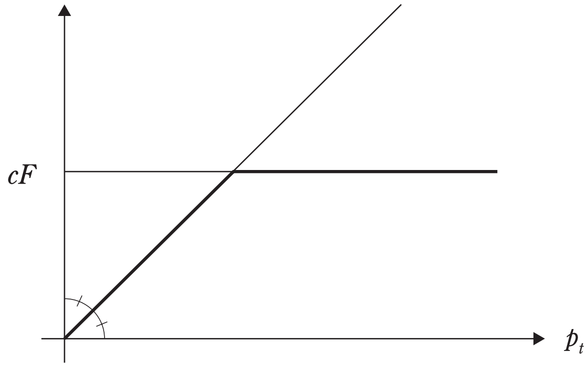
$$\overline{\overline{U}}(p_0)=\int_0^{\infty}d(p_t)\,h(p_0,p_t)\,dp_t+\varphi(\overline{p},\overline{\overline{p}})\int_0^{\infty}(d''(p_t)-d(p_t))\,h(\overline{p},p_t)\,dp_t$$

$$+\varphi(\overline{\overline{p}},\overline{p})\int_0^{\infty}(d'(p_t)-d(p_t))\,h(\overline{\overline{p}},p_t)\,dp_t$$

を計算すればいいことがわかる。

3. 非累積的優先株式の評価

累積的優先株式とは，ある期に優先配当額を受け取ることができないときは，その期以降に会社に優先配当額を上回る大きなキャッシュフローがあれば，累積して受け取ることができる優先株式である。非累積的はそうではない。参加型とは，ある期に優先配当額を上回るキャッシュフローが実現したとき，その残額についても普通株式と同様に配当を受け取ることができる優先株式である。非参加型はそうではない。優先配当額は，固定されている場合と，短期金利に連動して一定のルールで変動する場合も多い。ここでは一定の場合のみ取り扱っている。



(1) 非参加型の評価

額面が F で，優先配当率がその c 倍であるときの優先配当額は cF であるから，$d(p_t) = \min\{cF, p_t\}$ である。

前節 2 で述べたことから，

$$V(p_0) = E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\min\{cF, p_t\}\,dt\right] = \int_0^{cF} p_t h(p_0, p_t)\,dp_t + cF\int_{cF}^\infty h(p_0, p_t)\,dp_t$$

と書ける。

$p_0 \geq cF$ であれば，

$$V(p_0) = \frac{1}{J}\left\{\int_0^{cF} p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)} p_t\,dp_t + cF\int_{cF}^{p_0} p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)}\,dp_t + cF\int_{p_0}^\infty p_0^{R_1} p_t^{-(1+R_1)}\,dp_t\right\}$$

$$= \frac{1}{J}\left\{\int_0^{cF} p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)}(p_t - cF)\,dp_t + cF\int_0^{p_0} p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)}\,dp_t + cF\int_{p_0}^\infty p_0^{R_1} p_t^{-(1+R_1)}\,dp_t\right\}$$

$$= \frac{(cF)^{1-R_2}}{J}\left(\frac{1}{1-R_2} + \frac{1}{R_2}\right)p_0^{R_2} + \frac{cF}{r}$$

となる。上式の右辺の第 2 項は，2 の(2)の(i)で使った

$\frac{1}{J}\left\{\int_0^{p_0} p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)}\,dp_t + \int_{p_0}^\infty p_0^{R_1} p_t^{-(1+R_1)}\,dp_t\right\} = \frac{1}{r}$ という関係を使っている。

$p_0 < cF$ であれば，

$$V(p_0) = \frac{1}{J}\left\{\int_0^{p_0} p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)} p_t\,dp_t + \int_{p_0}^{cF} p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)} p_t\,dp_t + cF\int_{cF}^\infty p_0^{R_1} p_t^{-(1+R_1)}\,dp_t\right\}$$

$$= \frac{1}{J}\left\{\int_0^{p_0} p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)} p_t\,dp_t + \int_{p_0}^\infty p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)} p_t\,dp_t - \int_{cF}^\infty p_0^{R_1} p_t^{-(1+R_1)}(p_t - cF)\,dp_t\right\}$$

$$= \frac{p_0}{\delta} + \frac{(cF)^{1-R_1}}{J}\left(\frac{1}{1-R_1} + \frac{1}{R_1}\right)p_0^{R_1}$$

となる。上式の最後の第 1 項は，2 の(2)の(ii)で使った

$\frac{1}{J}\left\{\int_0^{p_0} p_0^{R_2} p_t^{-(1+R_2)} p_t dp_t + \int_{p_0}^{\infty} p_0^{R_1} p_t^{-(1+R_1)} p_t dp_t\right\} = \frac{p_0}{\delta}$ という関係を用いている。

以上まとめると，現在のキャッシュフローが p_0 である非参加型の優先株式の評価は，

$$V(p_0)=\begin{cases} Kp_0^{R_2}+\dfrac{cF}{r} & p_0 \geq cF \\ Bp_0^{R_1}+\dfrac{p_0}{\delta} & p_0 < cF \end{cases}$$

となる。ここに，$K=\frac{(cF)^{1-R_2}}{J}\left(\frac{1}{1-R_2}+\frac{1}{R_2}\right)$ であり，$B=\frac{(cF)^{1-R_1}}{J}\left(\frac{1}{1-R_1}+\frac{1}{R_1}\right)$ である。

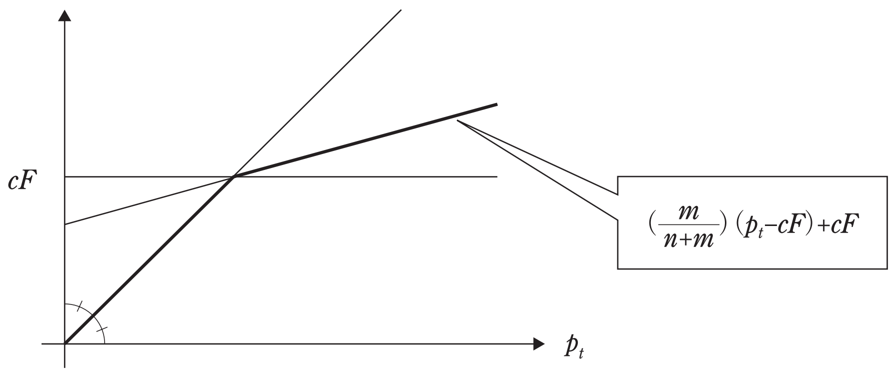
優先株の株数を m とすると，$\nu(p_0)=\frac{1}{m}V(p_0)$ が優先株式の価格である。

(2) 参加型の評価

普通株式の株数を n，優先株の株数を m とすれば，参加型の優先株式に対する配当は，

$$d(p_t)=\min\left\{\left(\frac{m}{n+m}\right)(p_t-cF)+cF,\ p_t\right\}$$

と書ける。



株価は，$\bar{\nu}(p_0)=\frac{1}{m}E_{p_0}\left[\int_0^{\infty} e^{-rt}\min\left\{\left(\frac{m}{n+m}\right)(p_t-cF)+cF,\ p_t\right\}dt\right]$

と書ける。

これは以下のように変形できる。

$$\overline{V}(p_0)=m\nu(p_0)=\frac{1}{(n+m)}E_{p_0}\left[\int_0^{\infty} e^{-rt}\{n\cdot\min\{cF,p_t\}+mp_t\}dt\right]$$

$$=\frac{n}{(n+m)}V(p_0)+\frac{m}{n+m}E_{p_0}\left[\int_0^{\infty} e^{-rt}p_t dt\right]$$

これに，先ほどの結果を使って，参加型の評価は，

$$\begin{cases} \dfrac{n}{(n+m)}\left(Kp_0^{R_2}+\dfrac{cF}{r}\right)+\dfrac{m}{n+m}\dfrac{p_0}{\delta} & p_0 \geq cF \\ \dfrac{n}{(n+m)}Bp_0^{R_1}+\dfrac{p_0}{\delta} & p_0 < cF \end{cases}$$

となる。

(3) 取得（請求）条項の評価

① 取得請求条項のみ

取得請求条項とは，優先株主が，優先株を普通株に転換できる権利である。ここでは，非累積的非参加型の優先株式に取得請求条項が付いている場合の株価を計算する。そのためにまず転換後の普通株式の価格を計算する。転換比率を q とする。すなわち優先株1株を q 枚の普通株式に転換できるものとする。ただし優先株はある時点で一斉に転換されるものとする。転換後における普通株数は，$n+qm$ 枚になるため，時点 k における転換後の普通株式の価格は，

$$E_k\left[\int_k^\infty e^{-r(t-k)}\frac{p_t}{n+mq}dt\right]=\frac{1}{n+mq}\frac{p_k}{\delta}$$

で計算される。時点 t における転換後，優先株式1枚につき $\dfrac{q}{n+mq}\dfrac{p_t}{\delta}$ の価値をもつことになる。

優先株保有者は，各期 p_t を観察して転換すべきかどうかを決定する。転換行使に期限がなく，転換しないときの価値も転換後の価値も時点 t に依存しないから，投資決定基準は，その時点の p_t の値のみに依存して決定される。したがって，ある基準になるキャッシュフロー p_t に最初に到達した時点で転換するのが最適である。その閾値となる $\overline{p}$ に最初に到達する時刻を，$\rho=\inf\{t>0, p_t=\overline{p}\}$ とすると，

$$V^{con}(p_0)=m\nu^{con}(p_0)=mE_{p_0}\left[\int_0^\rho e^{-rt}\frac{1}{m}\min\{cF,p_t\}dt+\int_\rho^\infty e^{-rt}\frac{q}{n+mq}p_tdt\right]$$

と書ける。これは次のように書き換えられる。

$$V^{con}(p_0)=E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\min\{cF,p_t\}dt+\int_\rho^\infty e^{-rt}\left(\frac{qm}{n+mq}p_t-\min\{cF,p_t\}\right)dt\right]$$

$$=V(p_0)+E_{p_0}[e^{-r\rho}]\left[\frac{qm}{n+mq}\frac{\overline{p}}{\delta}-V(\overline{p})\right]$$

$$=V(p_0)+\begin{cases} p_0^{R_2}\,\overline{p}^{-R_2}\left(\dfrac{mq}{n+mq}\dfrac{\overline{p}}{\delta}-V(\overline{p})\right) & p_0\geq\overline{p} \\ p_0^{R_1}\,\overline{p}^{-R_1}\left(\dfrac{mq}{n+mq}\dfrac{\overline{p}}{\delta}-V(\overline{p})\right) & p_0<\overline{p} \end{cases}$$

ここに，$V(\cdot)$ は上述した非参加型の優先株式の価値を表す関数である。

優先株の保有者は，この値を最大にするように，取得請求の行使の閾値を決定する。$p_0<\overline{p}$ に最大値があり，

$$(R_1-R_2)K\bar{p}^{R_2}+(1-R_1)\frac{mq}{n+mq}\frac{\bar{p}}{\delta}+\frac{cF}{r}R_1=0$$

となるような$\bar{p}$で最大値を与える。この値を$\bar{p}^*$としておけば，取得請求条項をもつ優先株式の評価は，

$$V(p_0)+\lambda p_0^{R_1}$$

と求まる。ただし，λはこの$\bar{p}^*$を$\bar{p}^{-R_1}\left(\frac{mq}{n+mq}\frac{\bar{p}}{\delta}-V(\bar{p})\right)$に代入した値である。

②　取得条項のみ

取得条項もさまざまな形態がある。会社が取得する場合，その対価が現金の場合，株式への交換の場合，双方のどちらかを投資家が選択できる場合などがある。対価が過去の株価に依存して変動するものもある。ここでは簡単化のために現金の場合の評価を非累積型非参加型の優先株をベースに行う。会社による取得価格はここでは一定の T とする。会社が普通株式の価値を最大化するように取得キャッシュフローの閾値$\bar{\bar{p}}$を決定する。その初到達時間を $\tau=\inf\{t\geq 0, p_t=\bar{\bar{p}}\}$ とする。この価格は，

$$V^{call}=m\nu^{call}(p_0)=mE_{p_0}\left[\int_0^\tau e^{-rt}\frac{1}{m}\min\{cF,p_t\}dt+e^{-r\tau}T\right]$$

$$=E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\min\{cF,p_t\}dt+e^{-r\tau}\left(mT-\int_\tau^\infty e^{-rt}\min\{cF,p_t\}dt\right)\right]$$

である。これより，

$$V^{call}(p_0)=V(p_0)+E_{p_0}[e^{-r\tau}](mT-V(\bar{\bar{p}}))$$
$$=V(p_0)+\begin{cases}p_0^{R_2}\bar{\bar{p}}^{-R_2}(mT-V(\bar{\bar{p}})) & p_0\geq\bar{\bar{p}}\\ p_0^{R_1}\bar{\bar{p}}^{-R_1}(mT-V(\bar{\bar{p}})) & p_0<\bar{\bar{p}}\end{cases}$$

である。

会社は，普通株式の価値を最大にするように最適な転換時のキャッシュフロー$\bar{\bar{p}}$を決定する。普通株式の価値と優先株式の価値の和は，$E_{p_0}\left[\int_0^\infty e^{-rs}p_s ds\right]=\frac{p_0}{\delta}$であるから，普通株式の価値$\frac{p_0}{\delta}-V^{call}(p_0)$を最大にするように，したがって，$V^{call}(p_0)$を最小にするように$\bar{\bar{p}}$を決定すればいい。取得請求条項のときと同様に，$p_0<\bar{\bar{p}}$のときに，最小値がある。それは，

$$\left(\frac{cF}{r}-mT\right)R_1+(R_1-R_2)K\bar{\bar{p}}^{R_2}=0$$

を満足する$\bar{\bar{p}}$で与えられ，それを$\bar{\bar{p}}^{R_1}(mT-V(\bar{\bar{p}}))$に代入した値を μ とすれば，取得条項をもつ優先株の価格は $V(p_0)+\mu p_0^{R_1}$と求まる。

③　取得条項と取得請求条項を同時に保有している優先株の評価

取得条項と取得請求条項が同時にあるときは，普通株式の立場に立った会社側と優先株式の保有者の間でのそれぞれの行使価格を戦略変数としたゲーム論的状況になっている。優先株保有者

が会社に取得請求するキャッシュフローの閾値を$\overline{p}$とし，株主の意向に従って会社が優先株を現金 T で取得する場合のキャッシュフローの閾値を$\overline{\overline{p}}$とするときの優先株式の価値は，

$$W(p_0)=mw(p_0)=mE_{p_0}\left[\int_0^{\rho\wedge\tau}e^{-rt}\frac{1}{m}\min\{p_t,cF\}dt+\int_{\rho\wedge\tau}^{\infty}e^{-rt}\left(T1_{\{\tau\leq\rho\}}+\frac{q}{n+mq}p_t1_{\{\rho\leq\tau\}}\right)dt\right]$$

$$=E_{p_0}\left[\int_0^{\infty}e^{-rt}\min\{p_t,cF\}dt\right]+E_{p_0}[e^{-r\tau}1_{\{\tau\leq\rho\}}]mT$$

$$+E_{p_0}[e^{-r\rho}1_{\{\rho\leq\tau\}}]E_{p_0}\left[\int_0^{\infty}e^{-rt}\frac{qm}{n+mq}p_tdt\right]-E_{p_0}\left[\int_{\rho\wedge\tau}^{\infty}e^{-rt}\min\{p_t,cF\}dt\right]$$

と書ける。これは以下のように書き換えられる。

$$W(p_0)=V(p_0)+\frac{p_0^2\overline{\overline{p}}^{-1}-\overline{\overline{p}}^2p_0^{-1}}{\overline{p}^2\overline{\overline{p}}^{-1}-\overline{\overline{p}}^2\overline{p}^{-1}}\left(\frac{qm}{n+mq}\frac{\overline{p}}{\delta}-V(\overline{p})\right)+\frac{\overline{p}^2p_0^{-1}-p_0^2\overline{p}^{-1}}{\overline{p}^2\overline{\overline{p}}^{-1}-\overline{\overline{p}}^2\overline{p}^{-1}}(mT-V(\overline{\overline{p}}))$$

戦略変数を明示化して，この場合の優先株式の価値を $W(p_0;\overline{p},\overline{\overline{p}})$ と書くことにする。投資家は，会社側の選択を所与として，優先株式の価値を最大にするように選択する。会社側は逆に投資家の選択を所与として優先株式の価値を最小にするように行動する。このゲームのナッシュ解は，

$$(\overline{p}^*,\overline{\overline{p}}^*)\in\arg\max_{\overline{p}}\ \arg\min_{\overline{\overline{p}}}W(p_0;\overline{p},\overline{\overline{p}})$$

である。この値を代入して，$W(p_0;\overline{p}^*,\overline{\overline{p}}^*)$ が取得条項と取得請求条項がある場合の優先株式の価値となる。ただ最適条件を記述することはできるが，残念ながらそれ以上に明示的な評価公式を求めることができない。

4．負債がある企業の優先株式の評価

普通株式と優先株式と負債がある会社を考える。優先株式は非累積型，非参加型でその他の条項はないものとする。n 株の普通株式，各期 $\frac{cF}{m}$ の優先配当金の m 株の優先株式，加えるに各期 b の負債に伴う支払がある会社を考える。倒産条件についてはいろいろあるが，ここでは構造モデルの考え方を踏襲し，ある企業価値になったときに債務不履行とし，その値を普通株主の利害に沿うように会社があらかじめ選択するとする(6)。企業価値を V とすると，企業価値がある $\hat{V}$ を下回った場合に倒産するとする。その初到達時刻を $\hat{\tau}=\min(t;V_t=\hat{V})$ とする。ところで，各期企業価値と会社資産が生みだし投資家に配布されるキャッシュフローとは，$V_t=\frac{p_t}{\delta}$ という関係があるので，この条件を p に定めてもよい。そこで，その値を，$\hat{p}=\delta\hat{V}$ とする。初到達時刻は変わらない。

債務が履行されていれば，$\min(cF,p_t-b)$ のキャッシュフローが優先株保有者への配当総額である。倒産すれば，もちろん配当はない。したがって，

$$S(p_0)=E_{p_0}\left[\int_0^{\hat{\tau}}e^{-rt}\min\{cF,p_t-b\}dt\right]$$

と書ける。これを$\hat{p} \leq p_0$の場合だけ書き下すとことを考える。$\hat{p} > p_0$の場合も同様に導ける。

以下のように変形する。

$$S(p_0) = E_{p_0}\left[\int_0^{\hat{\tau}} e^{-rt}(\min\{cF+b, p_t\} - b)\,dt\right]$$

$$= E_{p_0}\left[\int_0^{\hat{\tau}} e^{-rt}\min\{cF+b, p_t\}dt\right] - b\int_0^{\hat{\tau}} e^{-rt}dt$$

$$= E_{p_0}\left[\int_0^{\hat{\tau}} e^{-rt}\min\{cF+b, p_t\}dt\right] - \frac{b}{r}\left(1 - \left(\frac{p_0}{\hat{p}}\right)^{R_2}\right)$$

$$= E_{p_0}\left[\int_0^{\infty} e^{-rt}\min\{cF+b, p_t\}dt\right] - E_{p_0}[e^{-r\hat{\tau}}]E_{p_0}\left[\int_0^{\infty} e^{-rt}\min\{cF+b, p_t\}dt\right]$$

$$-\frac{b}{r}\left(1 - \left(\frac{p_0}{\hat{p}}\right)^{R_2}\right)$$

これより，負債がある会社の非累積型，非参加型の優先株式の評価は，$\hat{p} \leq p_0$のとき，

$$\begin{cases} \dfrac{cF}{r} - \left(\dfrac{p_0}{\hat{p}}\right)^{R_2}\dfrac{cF}{r} & cF + b \leq \hat{p} \\ \dfrac{cF}{r} + Kp_0^{R_2} - \left(\dfrac{p_0}{\hat{p}}\right)^{R_2}\left(\dfrac{\hat{p}}{\delta} + B\hat{p}^{R_1} - \dfrac{b}{r}\right) & \hat{p} \leq cF + b \leq p_0 \\ \dfrac{p_0}{\delta} + Bp_0^{R_1} - \dfrac{b}{r} - \left(\dfrac{p_0}{\hat{p}}\right)^{R_2}\left(\dfrac{\hat{p}}{\delta} + B\hat{p}^{R_1} - \dfrac{b}{r}\right) & p_0 \leq cF + b \end{cases}$$

となる。

一方，負債の価値は，

$$B(p_0) = E_{p_0}\left[\int_0^{\hat{\tau}} e^{-rt}\min\{p_t, b\}dt + (1-\zeta)\hat{V}e^{-r\hat{\tau}}\right]$$

$$= E_{p_0}\left[\int_0^{\hat{\tau}} e^{-rt}\min\{p_t, b\}dt + (1-\zeta)\delta\hat{p}e^{-r\hat{\tau}}\right]$$

と書ける。ここに，ζは倒産時の価値損失率である。これも具体的に書き下せるが，負債の評価なので省略する。

ところで，企業価値は$\dfrac{p_0}{\delta}$であるから，普通株式の価値は，$\dfrac{p_0}{\delta} - S(p_0) - B(p_0)$を最大にするように$\hat{p}$は決定される。したがって，$S(p_0) + B(p_0)$を最小にするように決定すればいい。

5. むすびにかえて

非累積優先株式については，さまざまな条項が付いたものを含めてあらかた評価は終わったものと考えている。そこで，累積的優先株式について，若干考察してむすびにかえようと考える。前述したように，累積的優先株式とは，各期の投資家に支払うことのできるキャッシュフローが優先配当金額以下であったとき，その期以降に繰り越して未払い分を受けることができる優先株

式である。未払い配当金がある場合，普通株式への配当はできないことになっている。未払い配当金に利息がついて累積していく場合とそうでない場合がある。利息をつけない場合が多い。

その評価は，

$$U(p_0)=E_{p_0}\left[\int_0^{\infty}e^{-rs}(p_s 1_{\{I_s<M_s\}}+cF\,1_{\{I_s=M_s\}})\,ds\right]$$

と書ける。ここに，$I_s=\int_0^s(p_t-cF)\,dt$ であり，また $M_s=\max_{0\le t\le s}\{I_t\}$ である。M_sはある経路についてそれまでのこの積分の最大値を取る計算になっている。このため累積的優先株式の評価はいわゆる経路依存（path-dependent）的であり，イクスプリシットに解析解を導くことができない。この事情はいわゆるアジアン・オプション（asian option）と同じである。アジアン・オプションと同様に近似解などの工夫が必要であると思われる。今後の課題としたい(7)。

＜付録＞　$h(p_0,p)$の計算

$((r-\delta)t,\sigma^2 t)$の幾何ブラウン運動過程について，危険中立確率のもとで，

$$f(t,p_0,p)=\frac{1}{p\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\frac{-(\ln(p/p_0)-(r-\delta-0.5\sigma^2)t)^2}{2\sigma^2 t}$$

となる。そこで，

$$h(p_0,p)=\int_0^{\infty}e^{-rt}f(t,p_0,p)\,dt$$

$$=\frac{1}{p\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\ln(p/p_0))^2-2\ln(p/p_0)(r-\delta-0.5\sigma^2)t+((r-\delta-0.5\sigma^2)^2+2r\sigma^2)t^2}{2\sigma^2 t}\right\}t^{-1/2}dt$$

$$=\frac{1}{p\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\ln(p/p_0))^2}{2\sigma^2 t}+\frac{(\ln(p/p_0)(r-\delta-0.5\sigma^2)}{\sigma^2}\frac{((r-\delta-0.5\sigma^2)^2+2r\sigma^2)t}{2\sigma^2}\right\}t^{-1/2}dt$$

ここで，変数を書き換えて，$s=t^{1/2}$とすると，$2ds=t^{-1/2}dt$ となるから，

$$=\frac{2}{p\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\ln(p/p_0))^2}{2\sigma^2 s^2}+\frac{(\ln(p/p_0)(r-\delta-0.5\sigma^2)}{\sigma^2}\frac{((r-\delta-0.5\sigma^2)^2+2r\sigma^2)s^2}{2\sigma^2}\right\}ds$$

となる。ところで，

$$-\frac{(\ln(p/p_0))^2}{2\sigma^2 s^2}+\frac{\ln(p/p_0)(r-\delta-0.5\sigma^2)}{\sigma^2}\frac{((r-\delta-0.5\sigma^2)^2+2r\sigma^2)s^2}{2\sigma^2}$$

$$=-\frac{\left(\frac{\ln(p/p_0)}{s}\right)^2+(Js)^2}{2\sigma^2}+\frac{\ln(p/p_0)(r-\delta-0.5\sigma^2)}{\sigma^2}$$

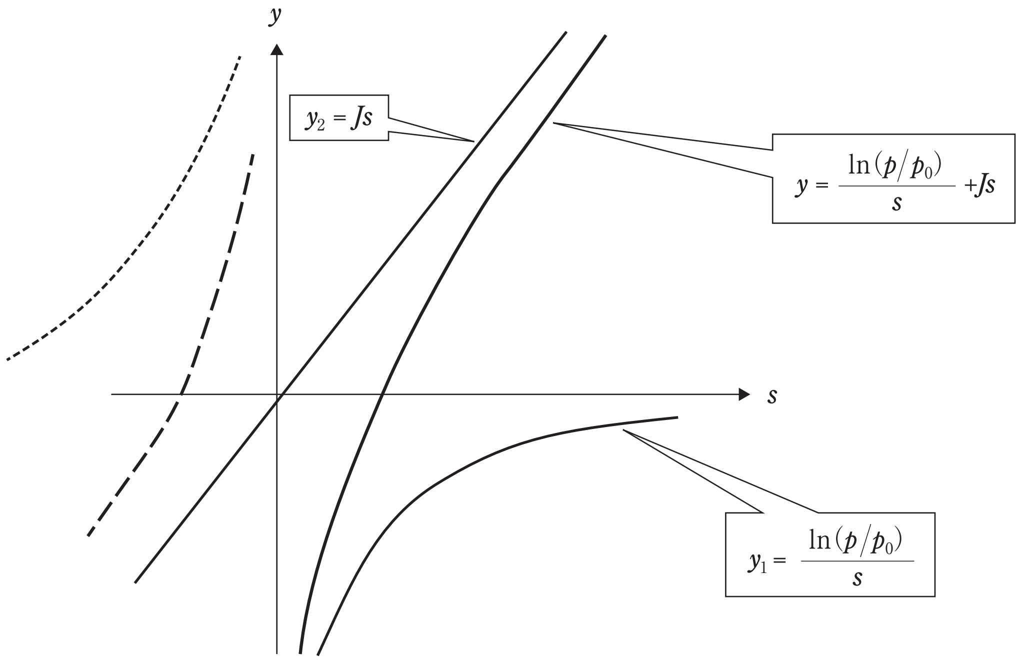
$$=-\frac{\left(\frac{\ln(p/p_0)}{s}\pm Js\right)^2}{2\sigma^2}+\frac{\ln(p/p_0)(r-\delta-0.5\sigma^2\mp J)}{\sigma^2}$$

であり，ここに $J=\sqrt{(r-\delta-0.5\sigma^2)^2+2r\sigma^2}$ とおいている。これより，

$$h(p_0,p)=\exp\frac{\ln(p/p_0)(r-\delta-0.5\sigma^2\pm J)}{\sigma^2}\frac{2}{p\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\left(\frac{\ln(p/p_0)}{s}\pm Js\right)^2}{2\sigma^2}\right)ds$$

$$=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{-(r-\delta-0.5\sigma^2)\mp J}{\sigma^2}}\frac{2}{p\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\left(\frac{\ln(p/p_0)}{s}\pm Js\right)^2}{2\sigma^2}\right)ds$$

となる。$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{-(r-\delta-0.5\sigma^2)\mp J}{\sigma^2}}$ が有限の値を得るためには，$p\leq p_0$ であれば，この指数の複合同順の－（マイナス）が従わなければならない。そのとき，被積分関数の複合同順は＋が対応する。そこでさらに，$y=\frac{\ln(p/p_0)}{s}+Js$ とおく。このとき $\ln(p/p_0)<0$ であり，$s\to 0$ のとき y→－∞



であり，また $s\to\infty$ のとき $y\to\infty$ あることに注意しておく。

$s\geq 0$ であるので，$s=\frac{1}{2J}\left[y+\sqrt{y^2-4J\ln(p/p_0)}\right]$ であり，また

$ds=\frac{1}{2J}\left[1+\frac{y}{\sqrt{y^2-4J\ln(p/p_0)}}\right]dy$ となり，

$$h(p_0,p)=\frac{1}{J}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-R_2}\frac{1}{p\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2\right\}\left[1+\frac{y}{\sqrt{y^2-4J\ln(p/p_0)}}\right]dy$$

である。ここに，$R_2=\dfrac{-(r-\delta-0.5\sigma^2)-J)}{\sigma^2}$ とおいている。

ところで，$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2\right\}dy=1$ である。また，

$\Psi(y)=\exp\left\{-\left(\dfrac{y}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2\right\}\dfrac{y}{\sqrt{y^2-4J\ln(p/p_0)}}$ とおくと，$\Psi(y)=-\Psi(-y)$ であるから，

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2\right\}\frac{y}{\sqrt{y^2-4J\ln(p/p_0)}}dy=0$ となり，最終的に，$h(p_0,p)=\dfrac{1}{J}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{-R_2}\dfrac{1}{p}$

となる。同様にして，$p\geq p_0$ のとき，$h(p_0,p)=\dfrac{1}{J}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{-R_1}\dfrac{1}{p}$ となる。ここに，

$$R_1=\frac{-(r-\delta-0.5\sigma^2)+J}{\sigma^2}$$

である。

以上まとめると，

$$h(p_0,p)=\begin{cases}\dfrac{1}{J}p_0^{R_1}p^{-(1+R_1)} & p\geq p_0\\ \dfrac{1}{J}p_0^{R_2}p^{-(1+R_2)} & p<p_0\end{cases}$$

となる。

注

(1) $d(p_s,s)$ と明示的に時間にも依存する場合は以下では考えていない。ただし多少工夫が要るが解けないことは無いと考えている。

(2) CAPM（Capital Asset Pricing Model）が援用できるとすれば，μ は，より具体的に $\mu=r+\phi\rho_{pm}\sigma$ のような形に表すことができる。ϕ はリスクの市場価格，ρ_{pm} は ρ_t の変動に応じて変動する資産と市場ポートフォリオの相関係数である。さらに r_m,σ_m をそれぞれ市場ポートフォリオの期待収益率と標準偏差とすれば，$\phi=(r_m-r)/\sigma_m$ と表すことができる。もちろん β 値を用いて表すこともできる。等価リスク中立確率法の詳しい説明は，A. Dixt and R.S.Pindyck (1994) の 4 章を参照されたい。

(3) ここでの方法は，ナンシー・ストーキー（N. L. Stokey）の web 上にある講義ノート

Brownian Models in Economics（http://www.ssc.wisc.edu/~manuelli/DiTella/Stokey）が展開していたアイディアに喚起された。ただ，現在ネットから削除されている。ストーキーのみならず，論文その他でこの方法を見たことがない。古い版ではストーキーは算術ブラウン運動で導出していたが，本稿では幾何ブラウン運動で導出している。N.L.Stokey (2009) にその考え方が引き継がれているようにみえる。

通常は，ファインマン＝カックの公式から評価価値 V に関する微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2p_t^2V''+(r-\delta)p_tV'-rV+\min\{cF,p_t\}=0$$

を導出し，smooth pasting ならびに value matching 条件を使い，さらに境界条件を用いて導く。もちろん同じ解になる。

(4) 例えば，A. Borodin and P. Salminen (2002) の p. 622 参照。

（5）　A. Borodin and P. Salminen（2002）の p. 627 を参照。

（6）　この種のモデルは信用リスクモデルとして展開されている。信用リスクモデルには，大きく構造型モデル（structural model）と誘導型モデル（reduced model）がある。構造型は，企業価値がある値以下になれば倒産するとして，その値を企業が最適にあらかじめ選択すると想定する。これに対して誘導型では外生的に倒産する可能性をポアソン分布で与える。ただ両者とも実証結果が芳しくないため，さまざまな工夫がなされてきている。構造モデルにかかわるわかりやすい説明として H. Leland のプリンストン大学での講義ノートがある。

（7）累積的優先株式の評価に関して，M. Realdon（2006）があるが，微分方程式だけで陽（explicit）に評価式を導出できない。ここで展開したアプローチとどうかかわるかも判然としない。将来の課題である。

参考文献

Borodin, A. and Salminen, P. (2002), *Handbook of Brownian Motion : Facts and Formula*, Birkhauser Boston.

Dixt, A. and Pindyck, R. S. (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.
（山口有一郎・谷下雅義他者（2002）『投資決定理論とリアルオプション』エコノミスト社）

Leland, H. (2006), “Structural models in corporate finance,”
〈http://www.haas.berkeley.edu/groups/finance/WP/LECTURE1.pdf〉

Realdon, M. (2006), “Revisiting cumulative preferred stock valuation,” *Financial Review Letters*.

Stokey, N. L. (2007), *The Economics of Inaction*, Princeton University Press.