

【研究ノート】

外部資金調達に摩擦を伴う投資＝財務モデルについて

久 保 俊 郎

Corporate Investment and Finance Model with Outside Financing Friction

KUBO, Toshiro

Abstract

This research note studies corporate investment and finance policies with outside financing friction. After briefly reviewing 2 period dynamic models, we reexamine KMS (Kim=Mauer=Sherman) model (1998) using rather general analytical tools, and investigate the possibility of some extensions of their model.

要 約

外部資金調達に摩擦を伴う状況での企業の投資と財務政策を考察している。2 期間の動学モデルを簡単に展望したのち、特に KMS (Kim=Mauer=Sherman) モデル (1998) について若干一般性のある分析用具を用いながら再検討している。また、彼らのモデルの問題点を考慮して、その拡張の可能性について検討している。

Key Words

Outside financing friction, Capital investment, liquidity investment, KMS model

キーワード

外部資金調達摩擦, 設備投資, 流動性投資, KMS モデル

目 次

- | | |
|----------------|-------------------------|
| 1. はじめに | 4. KMS モデルの問題点とその拡張について |
| 2. モデルの若干の展望 | 5. むすび |
| 3. KMS モデルについて | |

1. はじめに

本稿の目的は、外部資金調達に摩擦が伴う財務動学モデルにかかわり、特に Kim=Mauer=Sherman (1998) (以下 KMS) モデルを分析の一般性に留意しながら再検討し、その問題点を踏まえた上で、その拡張方向について検討することである。

環境変動に応じて調達や投資という財務活動を適切におこなっていくことが財務のマネジメントである。これらの活動がスムーズにおこなえる（あるいは摩擦＜friction＞を伴っていない）のであれば、その場その場で最善の活動をおこなえばいいわけであるから、状況と活動の対応関係だけ明らかにしておけばいいわけで、実は動学を持ち出す必要がない。ただ、現実的には一旦おこなった調達や投資は容易に変更できるものではない。とすると、現在の財務に係る意思決定が将来の意思決定に影響することを繰り返して意思決定しなければならなくなる。モデル的に言うと現在の意思決定が将来の意思決定の制約条件や目的関数を変えるのである。この状況で初めて入り込んでくる要素が、柔軟性や流動性といったことである。柔軟性や流動性を保持することは将来の制約条件を広くする、あるいは制約しないという意義で出てくるのである。ただし大抵の場合目的関数にはネガティブな影響を持っている。そこでトレードオフが出てくることになる。

柔軟性はともかく、現金を含む流動性に対する考慮は、財務にとって本質的であると考えられるが、経営財務論では現在では正面切って取り扱われることはない。言うまでもなくこれは、金融資本市場が「完全」、(明示的ではないが、実物資産市場も「完全」と仮定されていることによる。この状況では、フィシャー (Fisher) の分離定理⁽¹⁾が成立し、すなわち投資も調達と分離して取り扱いができ、さらに MM の定理が証明したように多くの財務意思決定は「無関係」になる。もちろん教科書的にも流動性管理なるものが説明される。実際の市場は「不完全」であるからこのような考慮が必要なのであるが、一方では「完全」性を仮定し、一方では「不完全」性を仮定した分断された論理展開ではある。

市場の「不完全性」、特に外部資金調達に摩擦を入れると、会社の流動性の保持が意味を持ってきて、調達や投資を分離して取り扱うことができなくなる。会社の内部資金や設備状況、その他財務状況全体の中で調達や投資を考えなければいけなくなる。例えば、現在の投資決定論では、その投資案件から生み出されるフリーキャッシュフローを用いて NPV 法や IRR 法など論ずるが、調達に摩擦があると、案件を分離して扱えず、全体としての内部資金との関係から投資案件の流動性の特性である回収期間が意味を持つてくることになる。事ほど左様に、外部資金調達に摩擦を伴う財務動学は実際の財務政策を解釈する上で多くの含意を提供してくれる。

ただ、この種のモデルの分析は容易ではない。そのため多くの文献では、シミュレーションによるが、残念ながら因果関係が見えづらい。そこで因果関係を「可視化」できるモデルはないかと考えてきた。そのため動学としては最小限のモデル化ではあるが、本稿では2期間モデルに限定した検討をおこなっている。これでも十分に含意を導き出せるのである。ただ、それでも分析

は容易ではない。Almeid et al. の一連の論文は、そこをうまく処理しようという試みとして理解しているが、ある含意を導出するために、さまざまモデルに変更があり統一的に理解しづらい。そのため KMS モデルを特に取り上げた。ただ、彼らのアプローチとは異なり、図解も含めて、より直感的に理解できるように、さらに分析手法の一般性に留意しながら詳細に検討している。会社の流動性投資にかかわり KMS モデルは今日でもよく引用されるモデルであり、基本としては格好と考えるが、問題点も多々あり、修正・拡張する必要がある。

以下 2 節で、KMS モデルを相対化するために、まず 3 期 2 期間モデルについて簡単に展望している。3 節で、KMS モデルを分析している。4 節で、その問題点を踏まえた上で、拡張する方向性を検討している。

2. モデルの若干の展望

2-1. 一般的なモデルの分類

モデルの時間の取り方からいくと、2 期間モデル、3 期間、それから 0 時点（現時点）から無限時点までを想定するモデルがある。時間間隔も離散的なものと連続的なものがある。無限・離散モデルの代表格は Gamba & Triantis (2007) であろう。無限・連続モデルとしては、Bolton et al. (2009) (2011) がある。2 期間の離散モデルは Almeida et al. (2002) (2004) (2011) によって精力的に展開されている。有限期間モデルでは、事業を最終期に強制的に終わらせるため、解釈にやや不自然な面がある。無限期モデルでは、倒産時点を内生的に選択できるようになっている。

調達と運用を一体化したモデルを取り扱うが、設備投資は、設備額（量）を選択させるものが一般的で、会社は各期その投資額を選択することができる。設備額（量）に応じて各期の収益（あるいはキャッシュ・フロー）が決定される。一方、アメリカンオプションのように、将来のある時点で一定の投資をすれば、それ以降において収益の流利が得られるとするモデルもある。

将来の状況は設備からの収益に伴う確率項によって表現されるが、既存設備の存在を想定しそのキャッシュ・フローがランダムになるものと、新規投資に確率項を伴う場合とある。その確率項も、加算的（additive）なものと乗数的（multiplicative）なものとある。確率項は離散では 2 項あるいは 3 項モデル、上限・下限のある連続無限モデル、上限・下限のない連続無限モデルなどがある。連続モデルの確率項は、その取扱いのしやすさから何らかのブラウン運動に従うとするものがほとんどである。

外部調達に伴う摩擦を表現する方法は 2 つあって、調達コストがかかるとするモデルと調達額に限度がある、いわゆる割当（rationing）モデルの場合がある。割当がある場合は、外生的に与える場合と内生的に与える場合がある。内生的に割当てる場合は、現在の自己資本、それから担保に供することができる資産価値の場合がある。なぜ外部資金調達に摩擦が伴うかをより根源的に明らかにしていく理論として情報の非対称性からする道徳的陥穽（moral hazard）や逆選択（adverse selection）モデルなどがある。ここでは、結果としての摩擦を前提とする。

2-2. 特に2期間モデルの紹介

(1) G.Kim, D.Mauer, and A.Sherman, (1998)

期日	0	1	2
既存設備	X_0		
設備投資	$-I_0$	$F(I_0) + \varepsilon_1$ $-I_1$	$F(I_1) + \varepsilon_2$
流動性	$-L_0$	$(1+r)L_0$	
調達		B_1 $-\xi B_1$	$-\min\{F(I_1) + \varepsilon_2, G\}$
配当	$D_0 =$ $X_0 - I_0 - L_0 \geq 0$	$D_1 =$ $F(I_0) + \varepsilon_1 + (1+r)L_0 + (1-\xi)B_1 - I_1 \geq 0$	$D_2 =$ $\max\{F(I_1) + \varepsilon_2 - G, 0\}$

会社は0期に現金 X_0 があり、それを流動性投資 (L_0) と設備の投資 (I_t) と配当 (D_0) に (株主の立場から) 最適に分ける問題である。0期の現金についての出所は明らかにしていない。会社に単に現金がある。既存設備という項目は、その他のモデルとの関係を整理するため置かれている。前期の設備投資額 (I_{t-1}) からの収益 (KMS では output と記されている) は $F(I_{t-1}) + \varepsilon_t$ と確率項 (ε_t) と加算的になっている。設備投資は1期で完全に償却する想定になっている。投資量は単位 (unit) で入れているが、設備価格についての言及はない。1に基準化していると考える。1期間で完全に償却するので、特に価格を入れる必要がなかったものとする。完全に償却しなければ、残存価値がある。流動性は r の率で収益を生む。

外部資金調達は、借入で、1期目にその期の投資を内部資金で賄えない時におこなう。調達額は B_1 であるが、調達額に比例的に ξ だけ費用がかかる。これが外部資金調達に摩擦があることの表現になっている。0期に外部資金調達はなし。外資金調達は株式でもいいと書いている。また、負債発行に固定費用も入れてもいいと書いている。2期目の債務額は G で、 B_1 は、2期目の $\min\{F(I_1) + \varepsilon_2, G\}$ を評価しておこなわれる。

株主も債権者も危険中立的で、 ρ で現在価値に割り引く。これが投資家が会社に要求している利回りと考えることができる。債権者から見ると貸付の金利である。流動性の運用金利は r であり、当然 $r < \rho$ でなければならない。この貸借金利差も、市場の摩擦の一つの表現と考えることができる。

(2) H.Almeida, M.Campello, and M.Weisbach, (2002)

期日	0	1	2
既存設備	c_0	$c_1(s)$	
設備投資	$-I_0$	$-I_1(s)$	$f(I_0) = F(I_0) + qI_0$ $g(I_1) = G(I_1(s)) + qI_1(s)$
内部現金	$-C$	C	
調達	B_0 $B_0 \leq (1-\tau)qI_0$	$B_1(s)$ $B_1(s) \leq (1-\tau)qI_1(s)$	$-B_0$ $-B_1(s)$

ヘッジ		$\sum p(s)h(s) = 0$ $-h(s) \leq (1-\mu)c_1(s)$	
配当	$d_0 = c_0 + B_0 - I_0 - C$	$d_1 = c_1(s) + h(s) + B_1(s) - I_1(s) + C$	$d_2 = f(I_0) + g(I_1(s)) - B_0 - B_1(s)$

ほとんどの記号はモデル(1)と同じである。0期の投資は、2期目に収益を生む。減価償却はなく、2期目に売却される。その額が qI_0 あるいは $qI_1(s)$ になっている。 C は内部現金であり、利子率は0と仮定しているの、単に0期から1期への現金の移転を表している。記号 s は自然の状態、 $p(s)$ はその確率である。ただし、このモデルでは高キャッシュ・フロー状態と低キャッシュ・フロー状態の2状態しかないという設定になっている。既存設備からの収益にランダム項がある。1期目に既存設備からのキャッシュ・フローの実現値を観察して、1期目の借入とヘッジ取引（状態間での資金の移転）をおこなう。ヘッジ取引は、低キャッシュ・フロー状態になった時の財務上の困難を避けるためである。高キャッシュ・フロー状態と低キャッシュ・フロー状態で資金を移転する市場の能力が、 $-h(s) \leq (1-\mu)c_1(s)$ で表されている。 $h(s)$ が移転金額、それが既存設備からのキャッシュ・フロー $c_1(s)$ の μ が引きでしか移転できないことを意味している。一方、0期と1期にいずれも2期目に債務がある借入があり、 q を設備の売却価格として、 $B_0 \leq (1-\tau)qI_0$ ならびに $B_1(s) \leq (1-\tau)qI_1(s)$ という担保制約がかかっている。時間にわたる資金の移転である借入は、それぞれの2期目の設備の売却額に、さらにその τ が引きでしかないことを意味している。このパラメータ μ, τ が金融資本市場での時間・状態にわたる資金の移動能力を表している。いわゆる完全市場は、これらが0である市場と考えることができる。すなわち、摩擦なしに自由に移転できることを意味している。

以上の設定で、配当の現在価値を最大にすべく、0期の現金やヘッジ取引など、いわゆる流動性管理やリスク管理を考えるモデルである。

同著者等による参考文献(2)は、モデルとしては、ヘッジ制約がないだけのこれと同じモデルで、これに実証研究がついたものとなっている。

(3) H.Almeida, M.Campello, and M.Weisbach, (2011)

期日	0	1	2
既存設備	c_0	$c_1(s)$	
設備投資	$-I_0$ $-I_{0R}$ $-I_{0S}$	$\lambda z(s)g(I_{0R})$ $\lambda g(I_{0S})$ $-I_1(s)$	$(1+\theta)g(I_0)$ $(1-\lambda)z(s)g(I_{0R})$ $(1-\lambda)g(I_{0S})$ $g(I_1(s))$
調達(必要なら)	$I_0 + I_{0R} + I_{0S} - c_0$ $-C(I_{0R} + I_{0S} + I_0 - c_0, k)$	$I_1(s) - \lambda z(s)g(I_{0R}) - \lambda g(I_{0S}) - c_1(s)$ $-C(I_1 - \lambda z(s)g(I_{0R}) - \lambda g(I_{0S}) - c_1(s), k)$	

このモデルは、単に設備投資と流動性投資という区分ではなく、設備の流動性特性を考慮した投資決定のモデルと考えることができる。調達の制約が、Frootら(1992)の外部資金調達費用関数 $C(E, k)$ で与えられるモデルである。ここに E は外部資金調達額である。 k は調達手段に係

るパラメータである。リターン関数は基本 $g(I)$ であると想定されている。0期も1期の投資も2期目に収益をもたらす。

0の投資機会は3種類ある。まったく流動性がない投資機会、これへの投資額を I_0 としている。流動性(保証可能性<pledgeability>)がない代わりに収益性は高い、これがパラメータ θ で表されている。後2つは流動性(保証可能性)があり、それぞれの2期目の収益の λ 倍を1期目に移転できる。あるいは、 $\lambda g(I)$ だけ1期目に、 $(1-\lambda)g(I)$ を2期目に受け取れるものと解釈できる。ここでは利子率0であるから、現在価値合計はそれらを足し合わせると $g(I)$ となつて、1期目でも2期目でも収益性の観点からは同じである。しかしながら外部資金調達に費用がかかれば、このパラメータの λ は回収期間の観点から意味を持ってくる。流動性がある投資機会はさらに2つあり、確実なものと不確実なものである。確実な投資機会への投資額を I_{0S} 、不確実な投資機会への投資額を I_{0R} で表している。不確実な投資機会は、 $z(s)g(I_{0R})$ だけの収益があり、 $\sum p(s)z(s) > 1$ と仮定されている。さらに最低の $z(s)$ は1より小さいと仮定されている。すなわち、確実な投資機会より収益性は期待値としては有利である。低キャッシュ・フロー状態での不確実な投資機会の収益性は確実なそれに劣る。

$I_1(s) > \lambda(z(s)g(I_{0R}) + \lambda g(I_{0S})) + c_1(s)$ であれば、外部からの資金調達は無い。モデル(2)と同様に自然の状態 s は、高キャッシュ・フロー状態($s=H$)と低キャッシュ・フロー状態($s=L$)の2つしかないと仮定されている。0期には外部資金調達があるが、1期の低キャッシュ・フロー状態のキャッシュ・フローを0として外部資金調達が必要であるが、高キャッシュ・フロー状態は、十分な内部資金があるとしてモデルが解法されている。詳細は同論文を参照されたい。

このモデルの含意は、外部資金調達に摩擦が伴っていれば流動性が高い、ここでは回収期間が短い投資が好まれること、さらにまた確実な投資機会が好まれるということである。回収期間法が正当化されるのは、会社の内部資金の大きさや外部資金調達があることによるものである。また確実な投資機会が好まれるという結論は、エージェンシー・モデルで有名な Jensen and Meckling の負債の「リスク代替効果」とは逆の含意であることが注目される。

ここから、さらにいくつかの含意が導ける。外部資金調達に摩擦ありきとすれば、個別会社側の方策としては、まずは外部の金融市場に頼らなくてもやっていけるようにすることである。運転資金の回収期間を短くする。あるいは回収期間が短い投資をすることがすぐ思いつくことである。さらには、かつて Donaldson (1986) が、財務可動性(financial mobility)の方策で明らかにしたことを思い出す必要がある。摩擦の原因が情報的なもの(情報の非対称性など)とすれば、摩擦そのものを減らすためには、外部金融資本への情報伝達が必要であるが、効率的な投資を促進することは国民経済にとっても有益なことであるので、個別的な対応だけでなく金融制度的な対応も望まれる。

これにかかわって Almeida et al. は、金融・資本市場が未発達な後進国では、外部資本調達に摩擦が大きく、儲ける可能性はあるが、リスクが小さくさらに目先の回収期間の短い投資案件しか着工できなくなるという現象を指摘している。制度の変化まで射程に入れたより長期の実証を

考えるときに参考になるものと考え。逆に、金融資本市場が未発達なところで、射程の長いそしてリスクを伴う投資を実施するための工夫として、外部資金調達の費用を節約するための内部資本市場 (internal capital market) が発展する説明にもなりえている。これらの含意は、完全な資本市場を想定したモデルからは出てこないどころか、理論の想定をネグって理論なるものを鵜呑みにすることがどれだけ問題かを教えてくれる。

(4) A.Gamba and A.Triantis, (2007)

このモデルは、無限期・離散モデルであるが、ある意味で包括的なモデルであるので、参考までに取り上げた。

今までのモデルと記号を揃えたいが、混乱しそうでもあるので、論文通りとしている。設備額(量)は簿価で k 、流動性は c 、負債額は(永久債の)額面で p で表されている。これが、いわばストックの変数である。

設備量が k のときの次期の収益は関数 $\pi(k, \theta)$ と一般的に与えられている。 θ は確率項である。減価償却率は δ である。 r は無リスクの金利、このモデルでは、債務を完全履行するための担保制約を入れるので、負債の金利は r であり、流動性も同じ r で運用できると想定されている。EBT (Earnings before Tax) は税引前利益であり、

$$EBT = y(k, p, c, \theta) = \pi(k, \theta) + rc - \delta k - rp$$

と定義される。CAT (Cash-flow after Tax) は税引後キャッシュ・フローであり、税引前利益から税金を差し引き、減価償却費を足し合わせて計算されている。税金(T)は、EBT に対する税率関数 $g(EBT)$ で計算されると想定されている。結果的に、

$$CAT = EBT - T + \delta k = EBT - g(EBT) + \delta k = \pi(k, \theta) + rc - g(y(k, p, c, \theta)) - rp$$

で計算される。

現金以外のストックを変えるについては、費用がかかる。まず負債残高が p から p' の変化した時、 $q(p, p')$ の費用がかかるとしている。増やす場合 ($p < p'$) は費用はかからないが、減らす場合 ($p > p'$) は比例的な費用がかかると想定されている。保有できる負債額には上限があり、次期の税引き後の支払充当額について、不確実性の要因が最低の実現値($\underline{\theta}$)であっても債務が履行できるという制約条件がかせられている。すなわち、 $p'(1+r) \leq c'(1+r) + sk'(1-\delta) + \pi(k', \underline{\theta}) - g(y(k', p', c', \underline{\theta}))$ である。ここに、 s は、財務的困難時の設備の売却価格である。財務的困難の条件は、税引後キャッシュ・フロー (CAT) に流動性(c)を足してもその値がマイナスになるとき ($CAT + c < 0$) と定義されている。財務的困難時以外でも設備が過剰であれば、資産を売却することもあるが、そのときの価格は $l(>s)$ と想定されている。財務的困難時は、いわゆる投げ売り (fire sale) をおこなわなければいけないことによる。もちろん設備を拡大することもある。このときの価格は 1 である。

設備量が k から k' に変わるときの調整費用 (摩擦) は

$$x(\phi, l) = \begin{cases} \phi \cdots \text{if } \xi \geq 0 \\ \phi l \cdots \text{if } \xi \leq 0 \end{cases}$$

で計算される。ここに、 $\phi = k' - k(1 - \delta) + \max\left\{-\frac{CAT + c}{s}, 0\right\}$ である。 $k' - k(1 - \delta)$ が投資額である。 $\max\left\{-\frac{CAT + c}{s}, 0\right\}$ は、前述したように財務的困難時には、 $CAT + c < 0$ のマイナス額だけ価格 s で設備の売却をおこなうことを意味している。財務的困難以外 ($CAT + c > 0$) でも、設備が過剰であれば価格 l で設備の売却をおこなう。資産の購入とともに設備の売却もあるモデルは多々あるが、財務的困難時とそうでない場合まで分けて設備の売却価格を変えるモデルはこれ以外で見たことがない。

さらに、株主へは配当支払だけでなく、株主から追加的な出資もできるようになっていて、配当支払時は、配当額に個人税率 τ_e がかかるように、さらに株主からの追加的な出資にも λ の費用がかかると想定されている。株主へのあるいは株主からの実際のキャッシュ・フローは

$$e(k, p, c, k', p', c', \theta) = \begin{cases} \xi(1 - \tau_e) \cdots \text{if } \xi \geq 0 \\ \xi(1 + \lambda) \cdots \text{if } \xi \leq 0 \end{cases}$$

と表わせる。ここに、 ξ は株主への残余キャッシュ・フロー

$$\xi = cf(k, p, c, k', p', c', \theta) =$$

$$\max\{CAT + c, 0\} - c' - p + p' - q(p, p') - \chi(k' - k(1 - \delta) + \max\left\{-\frac{CAT + c}{s}, 0\right\}, l)$$

である。これをもう少し砕いて書くと

$$\text{財務的困難とき} \cdots \xi = -c' - p + p' - q(p, p') - \chi(k' - k(1 - \delta) - \frac{CAT + c}{s})$$

$$\text{そうでないとき} \cdots \xi = CAT + c - c' - p + p' - q(p, p') - \chi(k' - k(1 - \delta))$$

目的関数は、株主へのキャッシュ・フローの割引現在価値である、

$$E(k, p, b, \theta) = \max_{(k', p', b') \in C} \{e(k, p, b, k', p', b', \theta) + \beta E_{k, p, b, \theta}[E(k', p', b', \theta')]\}$$

である。 β は割引率である。企業の選択は、各期 θ を観察して、株主資本価値を最大にするように設備量 k' 、負債 p' 、流動性 c' を決定することである。

担保制約条件の一般性など若干問題なしとしないが、想定としては、一般的である。ただ、これを解析的に解くのは不可能で、したがってシミュレーションで結果が導出されているが、考慮すべき要因を知る参照モデルとして、Almeida et al. 論文がやや特殊なだけに、両モデルを比較することは示唆的と考える。

3. KMS モデルについて

1 節でも書いたが、摩擦を伴う投資と財務の動学モデルを分析することは意義があるが、残念ながらそれを分析することは難しい。できるだけモデルの一般性を保ちながら、なんとか解法でできるモデルということで、2 節で紹介した KMS モデルをまず実際に解いてみることにする。KSM でももちろん解かれているのであるが、やや見通しが悪い。摩擦はモデル的には制約条件として表現される。さまざまな制約条件があるために、それぞれの制約条件が目的関数との関係

でどのように最適解に効いてくるか、図を用いて、それをいわば「可視化」する必要があると考えた次第である。

3-1. 最適化

動学モデルはバックワード・インダクション (backward induction) で1期目から解かれる。

(1) 1期目の最適化

会社は0期目の設備投資 (I_0) と流動性投資 (L_0) と設備投資に伴う不確実性の実現値 ε_1 を観察して、1期目の配当額と2期目の配当額の割引期待現在価値の合計を最大するように1期目の設備投資額 (I_1) と借入 (B_1) を決定する。したがって、1期目 ($t=1$) における意思決定は以下の問題を解けばいい。ただし、 $E_1[D_2]$ は2期目の不確実性に依存する2期目の配当額の期待値を表す。

$$V_1(I_0, L_0, \varepsilon_1) = \max_{I_1, B_1} \left\{ D_1 + \frac{E_1[D_2]}{1+\rho} \right\}$$

$$\text{subject to } D_1 \geq 0, I_1 \geq 0, B_1 \geq 0,$$

$$\text{where } D_1 = F(I_0) + \varepsilon_1 + L_0(1+r) - I_1 + B_1(1-\xi)$$

$$\text{and } E_1[D_2] = \int_{\underline{\varepsilon}_2}^{\bar{\varepsilon}_2} \max\{F(I_1) + \varepsilon_2 - G, 0\} g(\varepsilon_2) d\varepsilon_2$$

ここに、 $g(\varepsilon_2)$ は、 ε_2 に関する確率密度関数で、 $\varepsilon_2 \in [\underline{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_2]$ と仮定されている。この期待値は0と仮定されているので、最低の実現値 $\underline{\varepsilon}_2$ はマイナスである。収益関数 $F(I_{t-1})$ は2階微分可能で、厳密に増加 ($F' > 0$)、厳密に凸 ($F'' < 0$)、稲田条件 ($F'(0) = \infty, F'(\infty) = 0$) を満たすとしている。ところで、債権者も同じく危険中立的で、無危険利子率は ρ であると仮定されているから、

$$(1+\rho)B_1 = \int_{\underline{\varepsilon}_1}^{\bar{\varepsilon}_1} \min\{F(I_1) + \varepsilon_2, G\} g(\varepsilon_2) d\varepsilon_2$$

であり、したがって、

$$E_1[D_2] = \int_{\underline{\varepsilon}_2}^{\bar{\varepsilon}_2} \max\{F(I_1) + \varepsilon_2 - G, 0\} g(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 = \int_{\underline{\varepsilon}_2}^{\bar{\varepsilon}_2} (F(I_1) + \varepsilon_2 - \min\{F(I_1) + \varepsilon_2, G\}) g(\varepsilon_2) d\varepsilon_2$$

$$= F(I_1) - (1+\rho)B_1$$

となる。したがって、問題は、

$$V_1(I_0, L_0, \varepsilon_1) = \max_{I_1, B_1} \left\{ D_1 + \frac{F(I_1) - (1+\rho)B_1}{1+\rho} \right\}$$

$$\text{subject to } D_1 \geq 0, I_1 \geq 0, B_1 \geq 0,$$

$$\text{where } D_1 = F(K_0) + \varepsilon_1 + L_0(1+r) - I_1 + B_1(1-\xi)$$

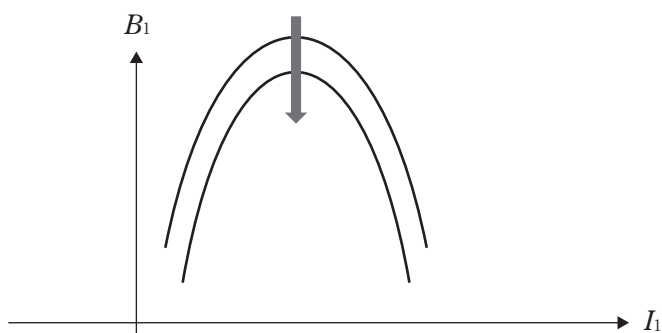
と書き換えられる。0期目の設備投資と流動性投資からの不確実性の要因に依存した1期目の内部資金を $X_1 \equiv F(I_0) + \varepsilon_1 + L_0(1+r)$ とおいておく。これを使って、さらに D_1 を代入消去して整理すると、最適化問題は、

$$V_1(I_0, L_0, \varepsilon_1) = V(X_1) = \max_{I_1, B_1} \left\{ X_1 - \xi B_1 - I_1 + \frac{F(I_1)}{1+\rho} \right\}$$

$$\text{subject to } X_1 + B_1(1 - \xi) - I_1 \geq 0, I_1 \geq 0, B_1 \geq 0$$

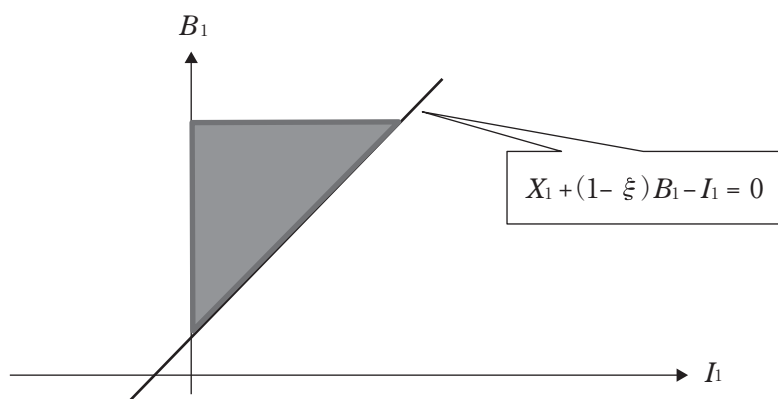
となる。制約条件付きの最適化問題であるからラグランジュ乗数を使って分析を進められるが、摩擦がある市場での分析は制約条件が重要で、制約条件がどのように作用しているか具体的に知ることが後々の展開に必要と考え、本稿では図的な説明をおこなっている。

まず (B_1, I_1) 平面で、目的関数の等高線のグラフは、仮定から等目的関数値（あるいは等期待配当額）のグラフが下にいくほど目的関数の値は大きくなっていく。 $X_1 - \xi B_1 - I_1 + \frac{F(I_1)}{1 + \rho} = t$ から $\xi B_1 = X_1 - I_1 + \frac{F(I_1)}{1 + \rho} - t$ となるため。

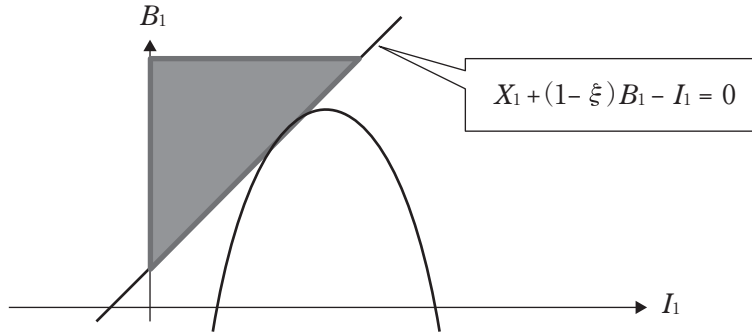


「山の頂上」を与える I_1 は、 $I^* = F'^{-1}(1 + \rho)$ である。

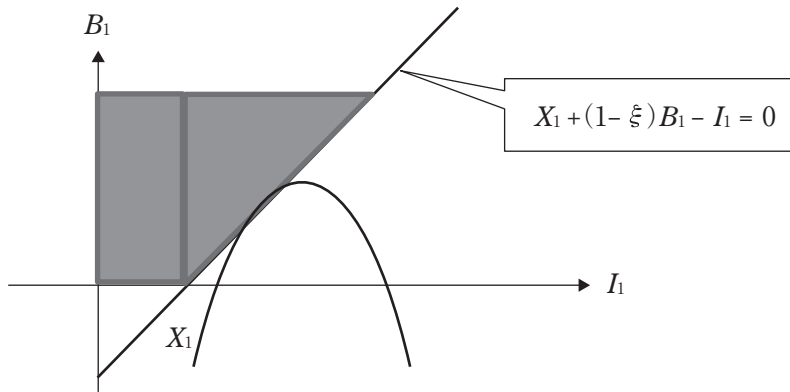
一方、制約条件は以下のように表せる。



まず、 $X_1 \leq 0$ である場合（不確実性の実現値が大きくマイナスで、結果内部資金がマイナスになっている場合）は以下ようになる。

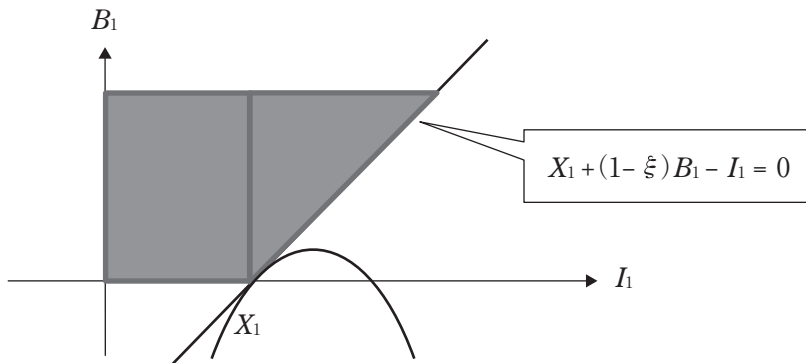


このとき、 $I = \hat{I}_1$ 、 $D_1 = 0$ 、 $B_1 = \frac{\hat{I}_1 - X_1}{1 - \xi} > 0$ である。ただし、接線条件から $\hat{I}_1 \equiv F'^{-1}\left(\frac{1 + \rho}{1 - \xi}\right)$ である。図からわかるように、 X_1 が正でも、ファーストベストの最適投資額 I_1^* ($\equiv F'^{-1}(1 + \rho)$) よりも小さいときも、 $I = \hat{I}_1$ 、 $D_1 = 0$ 、 $B_1 = \frac{\hat{I}_1 - X_1}{1 - \xi} > 0$ である。

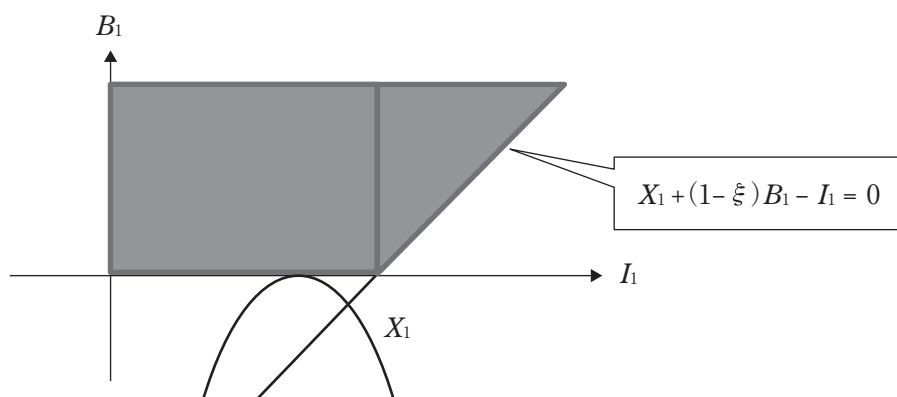


いずれの場合も、不確実性の実現値がマイナスで、結果1期目の内部資金が少なく、借金($B_1 > 0$)して \hat{I}_1 だけの投資をするのが最適になっている。調達に費用がかかるので、それだけ、ファーストベストの投資額 ($\equiv F'^{-1}(1 + \rho)$) よりも過小な投資額 \hat{I}_1 ($\equiv F'^{-1}\left(\frac{1 + \rho}{1 - \xi}\right)$) になっている。 $\xi = 0$ 、すなわち調達に摩擦がなければ、投資金額は変わらないことを注意しておく。

$I_1^* > X_1 > \hat{I}_1$ のとき、 $I_1 = X_1$ 、 $D_1 = 0$ 、 $B_1 = 0$ である。借入もしないで、すべての内部資金を投資し、配当もしない。



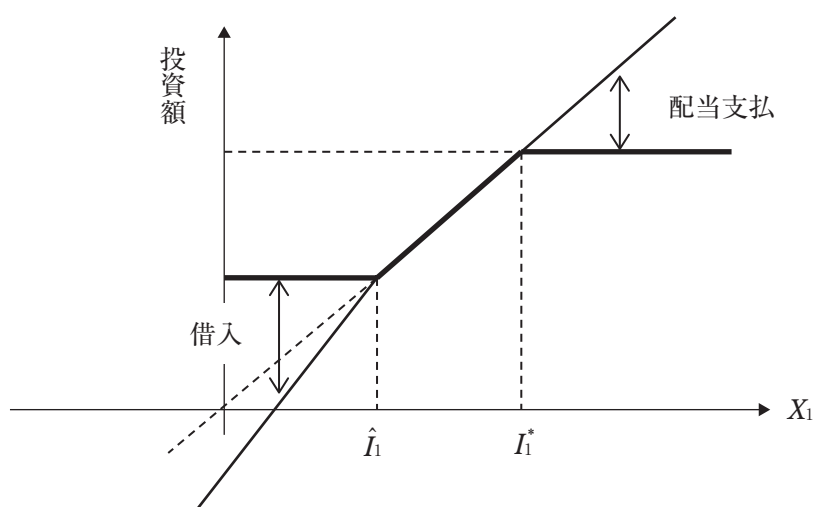
内部資金が十分に大きく、 $X_1 > \hat{I}_1^*$ のとき、 $I = I_1^*$ 、 $D_1 = X_1 - I_1^* > 0$ 、 $B_1 = 0$ であり、借入がなくても、内部資金だけでファーストベストな額の投資をすることができ、さらにその残金を配当に回すのが最適であることがわかる。



1期目の意思決定の結果をまとめると以下のようになる。

	I_1 (設備投資額)	B_1 (借入額)	D_1 (配当支払額)
$\hat{I}_1 > X_1$	\hat{I}_1	$\frac{\hat{I}_1 - X_1}{1 - \xi} (> 0)$	0
$I_1^* > X_1 > \hat{I}_1$	X_1	0	0
$X_1 > I_1^*$	I_1^*	0	$X_1 - I_1^* (> 0)$

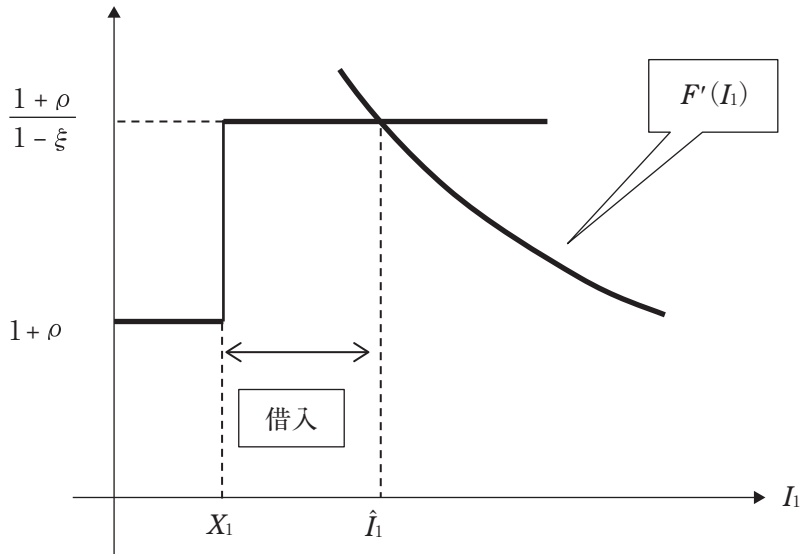
1期目の内部資金(X_1)の関数としての投資、借入、配当支払のありようをグラフで表したのが次図である。太線が投資額である。



配当支払や借入は1期目の内部資金(X_1)上で定義されたオプションのように解釈できる。配当支払はコール・オプションで、 $\max\{X_1 - I_1^*, 0\}$ と表せる。一方借入はプット・オプションで、 $\min\{X_1 - \hat{I}_1, 0\}$ と表せる。財務政策オプションとも呼んでおこう。

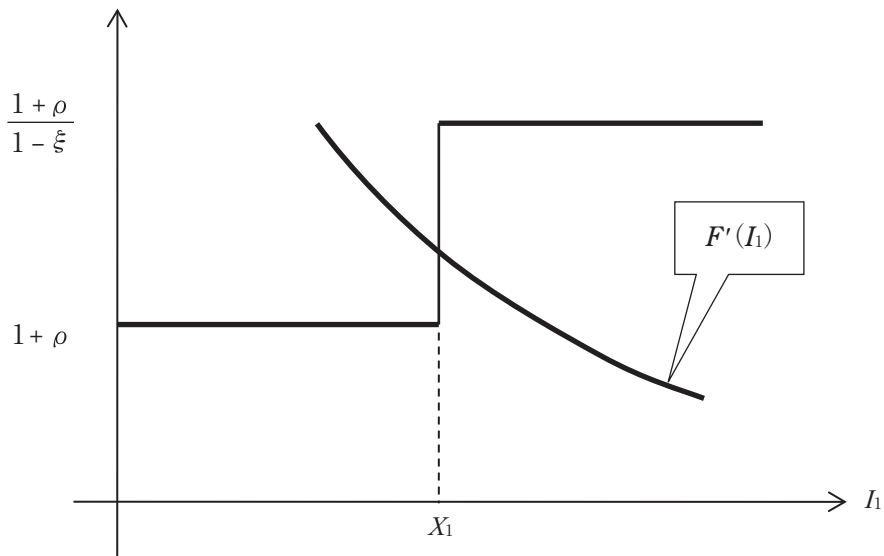
この結果は次の1期目の設備投資額の決定図で見ることできる。投資の限界効率は、必要収益率に応じる投資額を表しているから、会社における資金需要を表しており、内部資金と投資の限界効率との関係から、先ほどの図表に対応して以下の3つのパターンがある。

(1) 内部資金が少ない場合



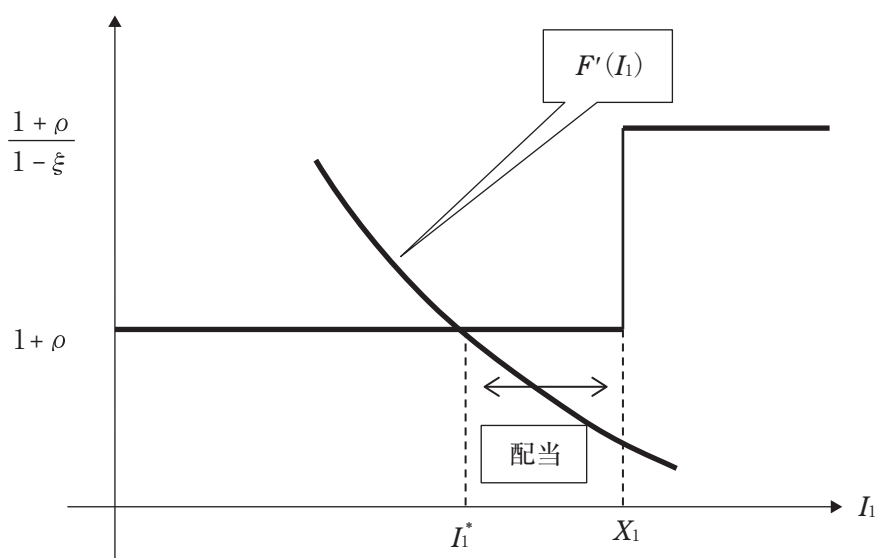
内部資金による不足分は、借入による。借入のコストは借入に伴う費用があるために、高くなっている。そのためセカンドベストの投資額になっている。

(2) 内部資金が多くも少なくもない場合



この場合は、資金をすべて投資し、配当支払も借入もない。

(3) 内部資金が潤沢な場合



内部資金のみでファーストベストの投資がおこなわれ、内部資金が投資額を上回る部分は配当に回される。

この図表は簡単な場合のベッキング・オーダー論を表していると解釈できる。すなわち、資金需要に比して十分な内部資金があれば、まずその内部資金を使い、もし足りなくなれば、外部資金、この場合は借入を使うということである。ここでは取り扱っていないが、1期目に株式による調達を入れるモデルの拡張は容易にできる。借入では、調達費用としては変動費しか取り扱っていないが、同じ借入でも社債やさらに株式などの直接金融の調達費用は固定費を含んだものと想定するのが自然で、投資に必要な外部調達額に依存して安価な調達手段があるはずで、そうすれば完全なベッキング・オーダー理論のモデル的な説明となっている。ただし、何にせよ特定の調達費用関数を入れれば、資金調達の順番が説明できるということであって、それではなぜそのような調達費用関数になるかということは、情報の非対称性などを繰り返し、より本質的に説明されなければならない。それはさておき、上図は、ベッキング・オーダー論とともに、内部資金と投資の関係から配当政策と資金調達の双方を説明するものになっている。内部資金を一定とすると、会社の将来投資の生産性と財務政策は関係がある。生産性が低いと配当されるが、生産性が高いと借入をしてでも投資するのがいいことになる。

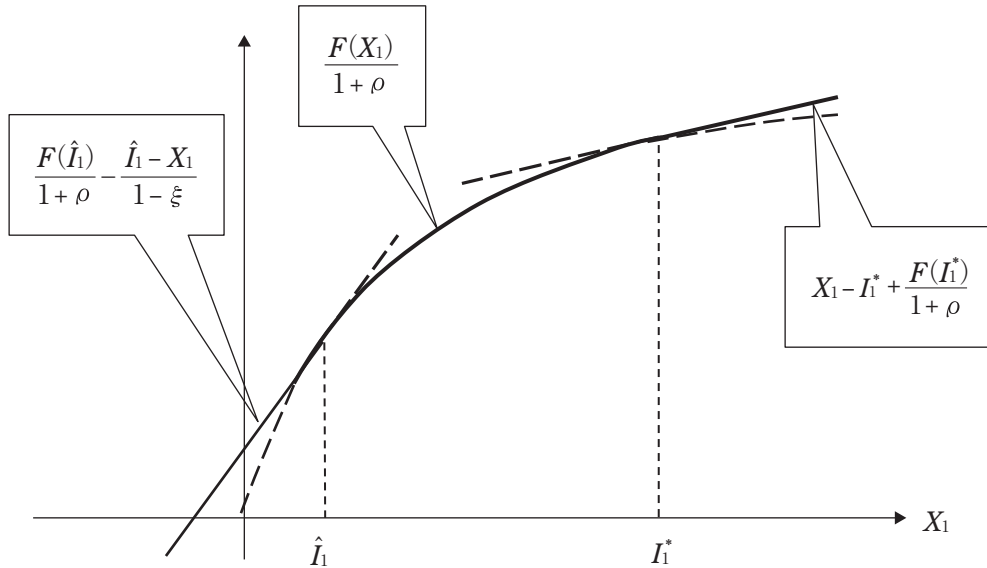
上の結果から、1期と2期の配当額と1期目の最適問題の目的関数の値(V_1)を求めると次のようになる。

	D_1	$E(D_2)$	$V_1(X_1)$
$\hat{I}_1 > X_1$	0	$F(\hat{I}_1) - (1+\rho) \frac{\hat{I}_1 - X_1}{1-\xi}$	$\frac{F(\hat{I}_1)}{1+\rho} - \frac{\hat{I}_1 - X_1}{1-\xi}$
$I_1^* > X_1 > \hat{I}_1$	0	$F(X_1)$	$\frac{F(X_1)}{1+\rho}$
$X_1 > I_1^*$	$X_1 > I_1^*$	$F(I_1^*)$	$X_1 - I_1^* + \frac{F(I_1^*)}{1+\rho}$

場合分けが煩雑であるので、この結果を一つの式で表現することを考える。先ほどのオプションの表記を使って、まずは

$$V_1(X_1) = \frac{F(X_1 - \max\{X_1 - I_1^*, 0\} - \min\{X_1 - \hat{I}_1, 0\})}{1+\rho} + \max\{X_1 - I_1^*, 0\} + \frac{\min\{X_1 - \hat{I}_1, 0\}}{1-\xi}$$

と書ける。 $V_1(X_1)$ の概形を書くと下図のようになる。



内部資金(X_1)の定義式を代入すれば、少し長いが、

$$V_1(I_0, L_0, \varepsilon_1)$$

$$= \frac{F(F(I_0) + \varepsilon_1 + L_0(1+r) - \max\{F(I_0) + \varepsilon_1 + L_0(1+r) - I_1^*, 0\} - \min\{F(I_0) + \varepsilon_1 + L_0(1+r) - \hat{I}_1, 0\})}{1+\rho}$$

$$+ \max\{F(I_0) + \varepsilon_1 + L_0(1+r) - I_1^*, 0\} + \frac{\min\{F(I_0) + \varepsilon_1 + L_0(1+r) - \hat{I}_1, 0\}}{1-\xi}$$

となる。

(2) 0期の最適化

1期目($t=1$)の分析を受けて、0期目($t=0$)の決定を考える。次の最適化問題を考えればいい。ただし、 $E_0[V_1(I_0, L_0, \varepsilon_1)]$ は、1期目の不確実性の要因 ($\varepsilon_1 \in [\underline{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_1]$)であり、 ε_2 とは同一の独立

の分布である) についての期待値である。記法が煩雑であるので、以下 ε_1 の下添え字を省略する。

$$V_0(X_0) = \max_{I_0, L_0} \left\{ D_0 + \frac{E_0[V_1(I_0, L_0, \varepsilon)]}{1+\rho} \right\}$$

subject to $D_0 \geq 0, I_0 \geq 0, L_0 \geq 0,$

where $D_0 = X_0 - I_0 - L_0$

D_0 を代入消去すると次のようになる。

$$V_0(X_0) = \max_{I_0, L_0} \left\{ X_0 - I_0 - L_0 + \frac{E_0[V_1(I_0, L_0, \varepsilon)]}{1+\rho} \right\}$$

subject to $X_0 \geq I_0 + L_0, I_0 \geq 0, L_0 \geq 0,$

この分析をこのままやるのは若干込み入っている。 $V_1(I_0, L_0, \varepsilon_1)$ にまず $F(I_0) + (1+r)L_0$ がま
とまって入っているので、これを $F(I_0) + (1+r)L_0 = H$ とおくことにする。 H は、1 期目の不確
実性の要因を除いた内部資金額である。 $V_1(I_0, L_0, \varepsilon)$ を改めて、

$$V(H, \varepsilon) = \frac{F(\varepsilon + H - \max\{\varepsilon + H - I_1^*, 0\} - \min\{\varepsilon + H - \hat{I}_1, 0\})}{1+\rho} + \max\{\varepsilon + H - I_1^*, 0\} \\ + \frac{\max\{\varepsilon + H - \hat{I}_1, 0\}}{1-\xi}$$

とおいておく。さらに、 $V(H) = \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} V(H, \varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon (= E_0[V_1(I_0, L_0, \varepsilon)])$ とおく。

H を戻して、元の最適問題を書き換えると、

$$V_0(X_0) = \max_{I_0, L_0} \left\{ X_0 - I_0 - L_0 + \frac{V(F(I_0) + (1+r)L_0)}{1+\rho} \right\}$$

subject to $X_0 \geq I_0 + L_0, I_0 \geq 0, L_0 \geq 0$

となる。

この問題を解くためには、まず関数 $V(H)$ についての性質を知る必要がある。

(命題1) $V'(H) > 0$ かつ $V''(H) \leq 0$ である。

(証明)

$$V(H) = \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} V(H, \varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon \\ = \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left\{ \frac{F(\varepsilon + H - \max\{\varepsilon + H - I_1^*, 0\} - \min\{\varepsilon + H - \hat{I}_1, 0\})}{1+\rho} + \max\{\varepsilon + H - I_1^*, 0\} \right. \\ \left. + \frac{\min\{\varepsilon + H - \hat{I}_1, 0\}}{1-\xi} \right\} g(\varepsilon) d\varepsilon$$

である。 $V'(H) = \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial V(H, \varepsilon)}{\partial H} g(\varepsilon) d\varepsilon$ であるので、 $\frac{\partial V(H, \varepsilon)}{\partial H}$ を計算するが、

$$1_{(\varepsilon+H-I^*>0)} \equiv \begin{cases} 1 & (\varepsilon+H-I^* \geq 0) \\ 0 & (\varepsilon+H-I^* < 0) \end{cases}, \quad 1_{(\varepsilon+H-\hat{I}<0)} \equiv \begin{cases} 1 & (\varepsilon+H-\hat{I} \leq 0) \\ 0 & (\varepsilon+H-\hat{I} > 0) \end{cases}$$

という定義関数を用いて $V(H, \varepsilon)$ を書き換えておこなう。

$$V(H) = \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left\{ \frac{F(\varepsilon+H)}{1+\rho} (1 - 1_{(\varepsilon+H-I^*>0)} - 1_{(\varepsilon+H-\hat{I}<0)}) + \left(\frac{F(I_1^*)}{1+\rho} + \varepsilon + H - I_1^* \right) 1_{(\varepsilon+H-I^*>0)} \right. \\ \left. + \left(\frac{F(\hat{I}_1)}{1+\rho} + \frac{\varepsilon+H-\hat{I}_1}{1-\xi} \right) 1_{(\varepsilon+H-\hat{I}<0)} \right\} g(\varepsilon) d\varepsilon$$

と書ける⁽²⁾。そうすると、

$$\frac{\partial V(H, \varepsilon)}{\partial H} = \frac{F'(\varepsilon+H)}{1+\rho} \\ + \left(-\frac{F'(\varepsilon+H)}{1+\rho} + 1 \right) 1_{(\varepsilon+H-I^*>0)} + \left(\frac{F(I_1^*)}{1+\rho} - \frac{F(\varepsilon+H)}{1+\rho} + \varepsilon + H - I_1^* \right) \delta_{(\varepsilon+H-I^*)} \\ + \left(-\frac{F'(\varepsilon+H)}{1+\rho} + \frac{1}{1-\xi} \right) 1_{(\varepsilon+H-\hat{I}<0)} + \left(\frac{F(\hat{I}_1)}{1+\rho} - \frac{F(\varepsilon+H)}{1+\rho} + \frac{\varepsilon+H-\hat{I}_1}{1-\xi} \right) \delta_{(\varepsilon+H-\hat{I})}$$

となる⁽³⁾。ここに、 $\delta_{(\varepsilon+H-I^*=0)}$ 、 $\delta_{(\varepsilon+H-\hat{I}=0)}$ は、

$$\delta_{(\varepsilon+H-I^*=0)} \equiv \begin{cases} \infty & (\varepsilon+H-I^*=0) \\ 0 & (\varepsilon+H-I^* \neq 0) \end{cases}, \quad \delta_{(\varepsilon+H-\hat{I}=0)} \equiv \begin{cases} \infty & (\varepsilon+H-\hat{I}=0) \\ 0 & (\varepsilon+H-\hat{I} \neq 0) \end{cases}$$

というデルタ関数である。

これを積分に戻して、

$$V'(H) = \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial V(H, \varepsilon)}{\partial H} g(\varepsilon) d\varepsilon = \\ \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left[\frac{F'(\varepsilon+H)}{1+\rho} + \left(-\frac{F'(\varepsilon+H)}{1+\rho} + 1 \right) 1_{(\varepsilon+H-I^*>0)} + \left(\frac{F(I_1^*)}{1+\rho} - \frac{F(\varepsilon+H)}{1+\rho} + \varepsilon + H - I_1^* \right) \delta_{(\varepsilon+H-I^*)} \right. \\ \left. + \left(-\frac{F'(\varepsilon+H)}{1+\rho} + \frac{1}{1-\xi} \right) 1_{(\varepsilon+H-\hat{I}<0)} + \left(\frac{F(\hat{I}_1)}{1+\rho} - \frac{F(\varepsilon+H)}{1+\rho} + \frac{\varepsilon+H-\hat{I}_1}{1-\xi} \right) \delta_{(\varepsilon+H-\hat{I})} \right] g(\varepsilon) d\varepsilon$$

となる。注3におけるデルタ関数の積分の性質から、第3項と第5項は積分すると0になるの
で、

$$V'(H) = \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{F'(\varepsilon+H)}{1+\rho} (1 - 1_{(\varepsilon+H-I^*>0)} - 1_{(\varepsilon+H-\hat{I}<0)}) + 1_{(\varepsilon+H-I^*>0)} + \frac{1}{1-\xi} 1_{(\varepsilon+H-\hat{I}<0)} \right) g(\varepsilon) d\varepsilon$$

となる。同様に計算して、

$$V''(H) = \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{F''(\varepsilon+H)}{1+\rho} (1 - 1_{(\varepsilon+H-I^*>0)} - 1_{(\varepsilon+H-\hat{I}<0)}) \right) g(\varepsilon) d\varepsilon$$

収益関数の仮定より、 $F'>0$ 、 $F''<0$ であることより、 $V'(H)>0$ かつ $V''(H)\leq 0$ である。

(証明了)

(命題2) $1 \leq V'(H) \leq \frac{1}{1-\xi}$ である。 $V'(H)=1$ になるのは、 $H=I_1^*-\underline{\varepsilon}$ のとき、 $V'(H)=\frac{1}{1-\xi}$ に

なるのは、 $H = \hat{I}_1 - \bar{\varepsilon}$ のときである。

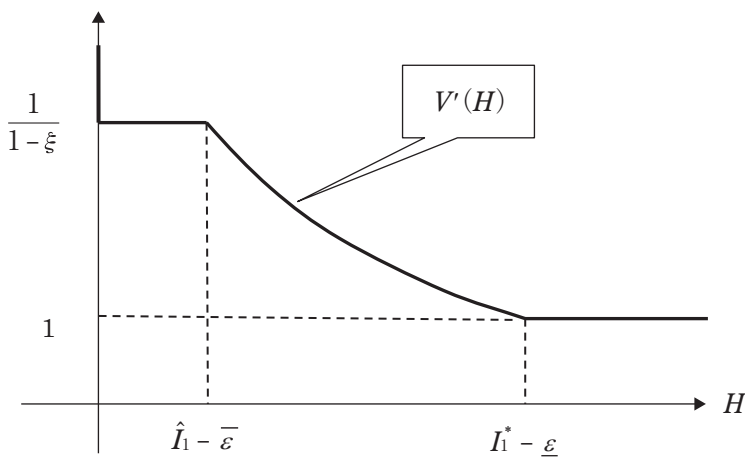
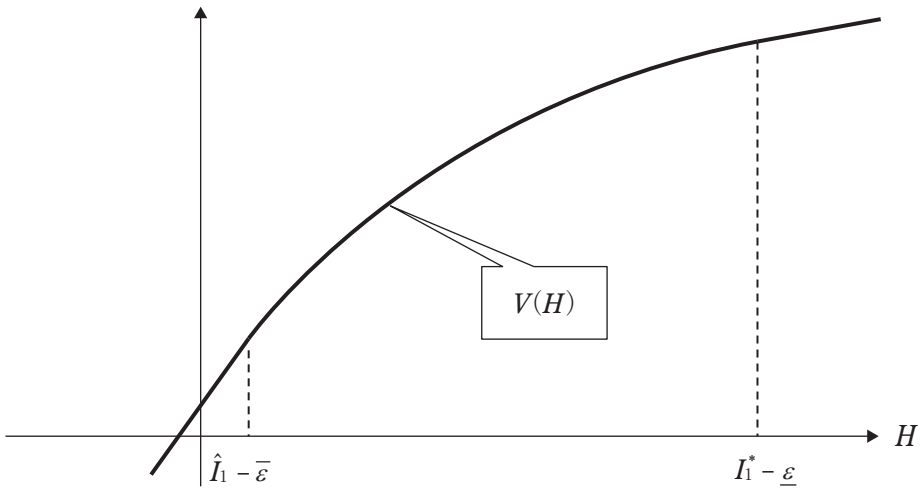
(証明)

再掲すると、

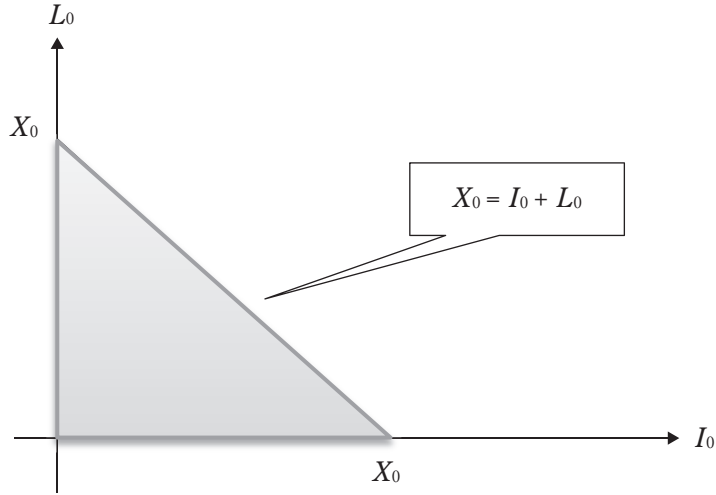
$$V'(H) = \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{F'(\varepsilon + H)}{1 + \rho} (1 - 1_{(\varepsilon + H - I^* > 0)} - 1_{(\varepsilon + H - \hat{I} < 0)}) + 1_{(\varepsilon + H - I^* > 0)} + \frac{1}{1 - \xi} 1_{(\varepsilon + H - \hat{I} < 0)} \right) g(\varepsilon) d\varepsilon$$

である。 $V'(H) = 1$ になるのは、すべての $\varepsilon \in [\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ に対して、 $\varepsilon + H - I^* > 0$ 、すなわち $\underline{\varepsilon} + H - I^* > 0$ のときである。 $V'(H) = \frac{1}{1 - \xi}$ となるのは、すべての $\varepsilon \in [\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ に対して、 $\varepsilon + H - \hat{I} < 0$ 、すなわち $H \leq \hat{I} - \bar{\varepsilon}$ のときである。ただし、そもそも $\hat{I} \geq \bar{\varepsilon}$ でなければいけない。 $\hat{I} \leq \bar{\varepsilon}$ であれば、 $V'(H) < \frac{1}{1 - \xi}$ である。(証明了)

以上を踏まえて、 $V(H)$ ならびに $V'(H)$ の概形を描くと以下ようになる。ただし下図は $\hat{I}_1 \geq \bar{\varepsilon}$ の場合である。



ここで、問題に戻って、まず制約条件は以下ようになる。設備投資と流動性投資に関する「予算制約線」である。



この問題の目的関数についてであるが、目的関数を $\phi(I_0, L_0)$ としておくと、目的関数は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial I_0} = -1 + \frac{V'(F(I_0) + (1+r)L_0)F'(I_0)}{1+\rho} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial L_0} = -1 + \frac{V'(F(I_0) + (1+r)L_0)(1+r)}{1+\rho} = 0$$

を満足する $(\tilde{I}_0, \tilde{L}_0)$ で最大値となる上に凸の関数である。これは、 \tilde{I}_0, \tilde{L}_0 において、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 I_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 L_0} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial I_0 \partial L_0} \right)^2 = \frac{(V''(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0)(F'(\tilde{I}_0))^2 + V'(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0))F''(\tilde{I}_0)}{1+\rho}$$

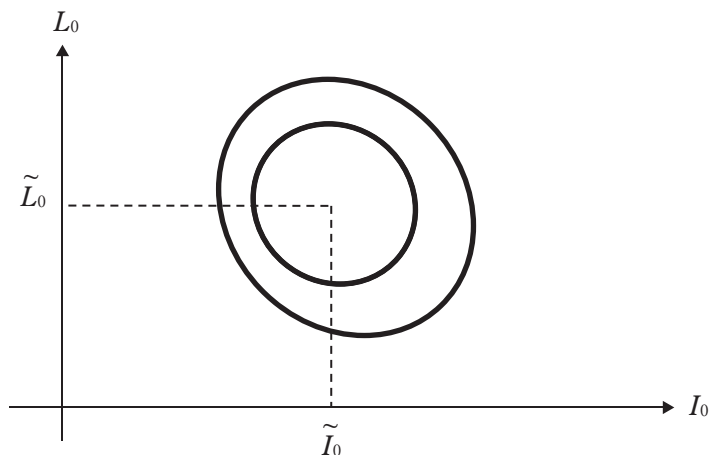
$$\frac{V''(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0)(1+r)^2}{1+\rho} - \left(\frac{V''(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0)F'(\tilde{I}_0)(1+r)}{1+\rho} \right)^2$$

$$= \frac{V'(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0))F''(\tilde{I}_0)V''(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0)(1+r)^2}{(1+\rho)^2} > 0$$

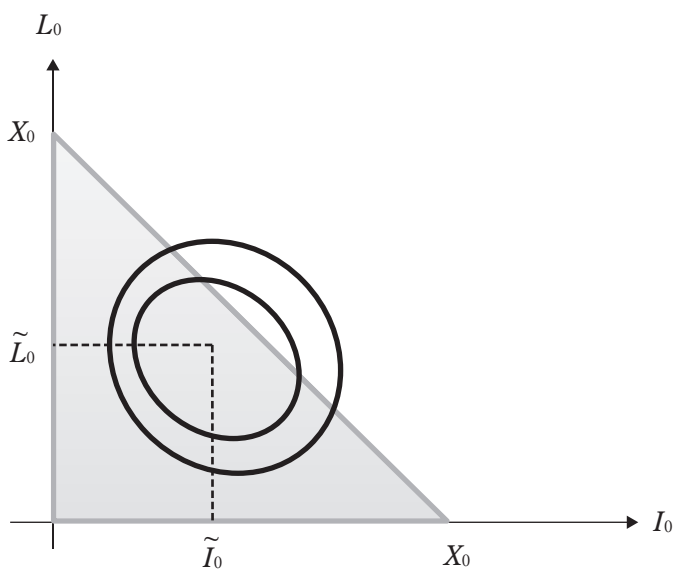
$$\text{かつ } \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 I_0} = \frac{V''(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0)(F'(\tilde{I}_0))^2 + V'(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0))F''(\tilde{I}_0)}{1+\rho} < 0$$

であることによる。

目的関数の無差別曲線（あるいは等高線）を書くと以下ようになる。



(1) まず目的関数の最大値(\tilde{I}_0, \tilde{L}_0)が制約条件の中に入っている場合、すなわち、 $X_0 > \tilde{I}_0 + \tilde{L}_0$ である場合について考える。



この場合、最適解は $I_0 = \tilde{I}_0$, $L_0 = \tilde{L}_0$ で与えられる。 $D_0 = X_0 - \tilde{I}_0 - \tilde{L}_0$ である。

この場合、この最大化問題の解は制約条件なしの目的関数の最大値で与えられる。この条件を整理すると、

$$F(\tilde{I}_0) = 1 + r,$$

$$\frac{(1+r)V(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0)}{1+\rho} = \frac{F'(\tilde{I}_0)V(F(\tilde{I}_0) + (1+r)\tilde{L}_0)}{1+\rho} = 1$$

となる。最初の条件は、0期の投資は、その期に短視的な最適化条件でいいことを意味してい

る。これは、このモデルでは減価償却率が1ということに由来している。2番目の条件の左辺は、0期の投資の2期までの限界投資効率になっている。0期の投資のいわゆるトービンの限界Q (Tobin's marginal Q) である。このモデルでは、投資の購入単位を1にしているので、それが1に等しいという条件になっている。

次に、この領域にこの解が存在する条件は、目的関数の最大値を制約条件に代入して、

$$\tilde{I}_0 = F'^{-1}(1+r) \geq 0,$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{V^{-1}\left(\frac{1+\rho}{1+r}\right) - F(F'^{-1}(1+r))}{1+r} \geq 0,$$

かつ

$$X_0 \geq \tilde{I}_0 + \tilde{L}_0 = F'^{-1}(1+r) + \frac{V^{-1}\left(\frac{1+\rho}{1+r}\right) - F(F'^{-1}(1+r))}{1+r},$$

でなければならない。

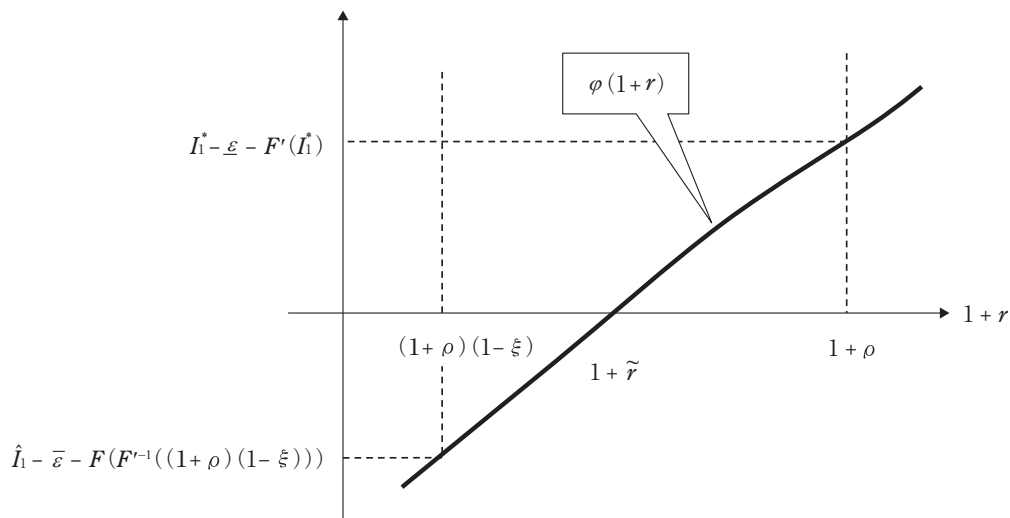
最初の条件は、収益関数の性質からいつでも満たされる。

2番目の条件は、検討を要する。

$\varphi(1+r) \equiv V^{-1}\left(\frac{1+\rho}{1+r}\right) - F(F'^{-1}(1+r))$ とおく。 $\varphi(1+r) = (1+r)\tilde{L}_0$ であるから、これは、0期目の流動性投資からの1期目の収益を表している。

$$\begin{aligned} \varphi'(1+r) &= \frac{1}{V'\left(V^{-1}\left(\frac{1+\rho}{1+r}\right)\right)} \left(-\frac{1+\rho}{(1+r)^2} \right) - \frac{F'(F'^{-1}(1+r))}{F''(F'^{-1}(1+r))} = \frac{1}{V'\left(V^{-1}\left(\frac{1+\rho}{1+r}\right)\right)} \left(-\frac{1+\rho}{(1+r)^2} \right) \\ &\quad - \frac{1+r}{F''(F'^{-1}(1+r))} \end{aligned}$$

である。命題1から $V'' < 0$ 、収益関数についての仮定から $F'' < 0$ であるから、 $\varphi'(1+r) > 0$ であることがわかる。ところで、 $1 \leq \frac{1+\rho}{1+r} \leq \frac{1}{1-\xi}$ から、 $(1+\rho)(1-\xi) \leq 1+r \leq 1+\rho$ でなければならない。したがって、 $1+r = 1+\rho$ のとき、命題2から $\varphi(1+\rho) = V^{-1}(1) - F(F'^{-1}(1+\rho)) = I_1^* - \bar{\varepsilon} - F(I_1^*) > 0$ となることが $\tilde{L}_0 \geq 0$ 、すなわち正の流動性投資がある条件である。 $1+r = (1+\rho)(1-\xi)$ のとき、同じく命題2から $\varphi((1+\rho)(1-\xi)) = V^{-1}\left(\frac{1}{1-\xi}\right) - F(F'^{-1}((1+\rho)(1-\xi))) = \hat{I}_1 - \bar{\varepsilon} - F(F'^{-1}((1+\rho)(1-\xi)))$ であるから、 $\hat{I}_1 - \bar{\varepsilon} - F(F'^{-1}((1+\rho)(1-\xi))) > 0$ であれば、すべての $1+r \in [(1+\rho)(1-\xi), 1+\rho]$ に対して、流動性投資は正である。 $\hat{I}_1 - \bar{\varepsilon} - F(F'^{-1}((1+\rho)(1-\xi))) < 0$ であれば、 $\varphi(1+\bar{r}) = 0$ となる流動性の収益率があり、その値以上で $\varphi(1+r) \geq 0$ になる。次図参照。縦軸は、前述したように0期の流動性投資からの1期目の収益である。



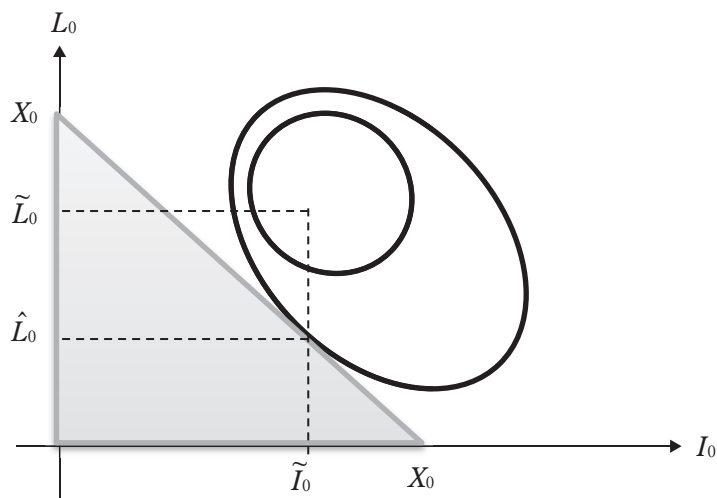
2番目と3番目の条件を合わせ整理すると,

$$(1+r)(X_0 - \tilde{I}_0) \geq V^{-1}\left(\frac{1+\rho}{1+r}\right) - F(\tilde{I}_0) \geq 0 \text{ となる。逆関数を元に戻して,}$$

$$V((1+r)(X_0 - \tilde{I}_0) + F(\tilde{I}_0)) \leq \frac{1+\rho}{1+r} \leq V(F(\tilde{I}_0)) \text{ でなければならない。}$$

この場合は, 流動性投資 ($\tilde{L}_0 > 0$) も配当支払 ($D_0 = X_0 - (\tilde{I}_0 + \tilde{L}_0) > 0$) もある。

(2) 次に, 目的関数の最大値が制約条件の外にある場合は, 以下のような状況である。



この場合は, 最適解は, 等高線と予算制約線が接するところである。制約条件なしの最大値で流動性投資が負になる場合がある。その場合は端点が解で, 流動性投資はない。

制約なしの目的関数の最大値 (\tilde{I}_0, \tilde{L}_0) が予算制約線の外側にある場合は, 0期の配当支払はない。このための条件は,

$$(1+r)(X_0 - F'^{-1}(1+r)) + F(F'^{-1}(1+r)) \leq V'^{-1}\left(\frac{1+\rho}{1+r}\right) \text{ である。}$$

目的関数の無差別曲線（あるいは等高線）の接線は、

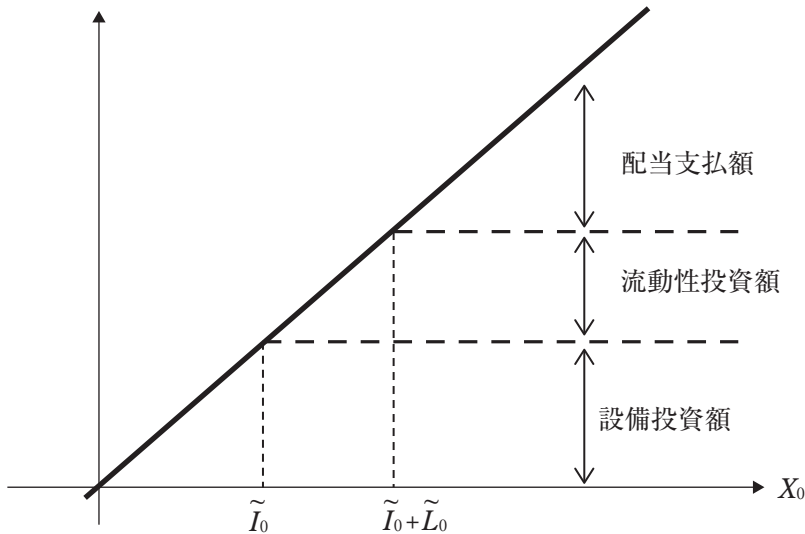
$$\begin{aligned} \frac{dL_0}{dI_0} &= -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial I_0}}{\frac{\partial \phi}{\partial L_0}} = -\frac{-1 + \frac{V'(F(I_0) + (1+r)L_0)F'(I_0)}{1+\rho}}{-1 + \frac{V'(F(I_0) + (1+r)L_0)(1+r)}{1+\rho}} \\ &= -\frac{V'(F(I_0) + (1+r)L_0)F'(I_0) - (1+\rho)}{V'(F(I_0) + (1+r)L_0)(1+r) - (1+\rho)} \end{aligned}$$

であるので、接線条件 $\frac{dL_0}{dI_0} = -1$ から、 $F'(I_0) = 1+r$ 、すなわち \tilde{I}_0 が最適解を与える設備投資額である。ただ、これが最適な設備投資額になるためには、 $X_0 \geq \tilde{I}_0$ でなければならない。このとき、流動性投資額は、 $L_0 = X_0 - \tilde{I}_0$ で与えられる。一方 $X_0 \leq \tilde{I}_0$ であるときは、最適な設備投資額は X_0 で、流動性投資はない。

以上まとめると次表のようになる。

	設備投資額	流動性投資額	配当支払額
$X_0 \leq \tilde{I}_0$	X_0	0	0
$X_0 \leq \tilde{I}_0 + \tilde{L}_0, X_0 \geq \tilde{I}_0$	\tilde{I}_0	$X_0 - \tilde{I}_0$	0
$X_0 \geq \tilde{I}_0 + \tilde{L}_0$	\tilde{I}_0	\tilde{L}_0	$X_0 - \tilde{I}_0 - \tilde{L}_0$

初期保有の現金の関数として 0 期の意思決定をまとめると以下のようにになる。



初期保有の現金 (X_0) が 0 期の設備投資額 (\tilde{I}_0) 以下であれば、すべて設備投資に回され、流動性への投資はない。それ以上の現金保有があればファーストベストの設備投資をおこない、なお残

余があれば流動性に投資し、さらに残余があれば、配当を払うということである。

3-3. 比較静学

均衡の流動性に対する投資は、いくつかのパラメータによって決定されるので、それが変化したときに、どのように均衡値が変化するか、いわゆる比較静学を KMS はおこなっている。モデルの外生的なパラメータとしては、借入金利(ρ)、貸付金利(r)、借入の調達費用(ξ)である。さらに、生産関数($F(I)$)と確率密度関数($g(\varepsilon_1)$)の形状にも均衡解は依存している。収益関数についても、 $F(I) = z\hat{F}(I)$ とベースになる収益関数 $\hat{F}(I)$ を想定し、それに対して生産性を表すパラメータとして z を導入し、その比較静学をおこなっている。さらに確率密度関数についても平均が0、分散が1の確率密度関数 $\bar{g}(u)$ に従う確率変数 u を想定し、 $\varepsilon_1 = \sigma u$ とした上で、 σ についての比較静学をおこなっている。 σ の大きさは、中心を保存しながら分散(あるいは標準偏差)の大きさを変える(いわゆる、mean preserving spreadである)、すなわちリスクの大きさを変えるパラメータになっている。

ここでは、調達摩擦の大きさ(ξ)が流動性投資にどのような効果があるかをここでの分析方法を利用して検討する。

$$V'(\tilde{H}) = \frac{1+\rho}{1+r} \text{と} \text{おいておく。} (\tilde{H} - F(X_0)) \delta_{(\tilde{H} - F(X_0) = 0)} = 0 \text{であるので,}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \xi} = \frac{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi} 1_{(\tilde{H} - F(X_0) \leq 0)} + (\tilde{H} - F(X_0)) \delta_{(\tilde{H} - F(X_0) = 0)}}{1+r} = \frac{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi} 1_{(\tilde{H} - F(X_0) \leq 0)}}{1+r} \text{である。ところで,}$$

$$\psi(\tilde{H}, \xi) \equiv \frac{1}{1+\rho} \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{F'(\varepsilon + \tilde{H})}{1+\rho} (1 - 1_{(\varepsilon + \tilde{H} - I^* > 0)} - 1_{(\varepsilon + \tilde{H} - \hat{I} < 0)}) + 1_{(\varepsilon + \tilde{H} - I^* > 0)} + \frac{1}{1-\xi} 1_{(\varepsilon + \tilde{H} - \hat{I} < 0)} \right)$$

$$g(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{1}{1+r} = 0 \text{から,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{H}} &= \frac{1}{1+\rho} \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{F''(\varepsilon + \tilde{H})}{1+\rho} (1 - 1_{(\varepsilon + \tilde{H} - I^* > 0)} - 1_{(\varepsilon + \tilde{H} - \hat{I} < 0)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{F'(\varepsilon + \tilde{H})}{1+\rho} (-\delta_{(\varepsilon + \tilde{H} - I^* = 0)} - \delta_{(\varepsilon + \tilde{H} - \hat{I} = 0)}) + \delta_{(\varepsilon + \tilde{H} - I^* = 0)} + \frac{\delta_{(\varepsilon + \tilde{H} - \hat{I} = 0)}}{1-\xi} \right) g(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned}$$

である。 I^* , \hat{I} についての定義から、 $\left(\frac{F'(I^*)}{1+\rho} - 1 \right) \delta_{(\varepsilon + \tilde{H} - I^* = 0)} = 0$, $\left(\frac{F'(\hat{I})}{1+\rho} - \frac{1}{1-\xi} \right) \delta_{(\varepsilon + \tilde{H} - \hat{I} = 0)} = 0$ であるので、

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{H}} = \frac{1}{1+\rho} \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{F''(\varepsilon + \tilde{H})}{1+\rho} (1 - 1_{(\varepsilon + \tilde{H} - I^* > 0)} - 1_{(\varepsilon + \tilde{H} - \hat{I} < 0)}) \right) g(\varepsilon) d\varepsilon < 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{1+\rho} \int_{\underline{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{1}{(1-\xi)^2} 1_{(\varepsilon + \tilde{H} - \hat{I} < 0)} \right) g(\varepsilon) d\varepsilon d\xi > 0$$

であるから、 $\frac{d\tilde{H}}{d\xi} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \xi}}{\frac{\partial \psi}{\partial H}} > 0$ となって、 $\frac{\partial L_0}{\partial \xi} = \frac{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi} \mathbf{1}_{(\tilde{H} - F(X_0) \leq 0)}}{1+r} \geq 0$ であることが証明できる。

すなわち、（ここでは借入ではあるが）外部資金調達に取引費用等が多くかかることが予想されれば、流動性への投資が増える。

特に、摩擦がない、すなわち $\xi = 0$ のときは、 $I_1^* = \hat{I}_1 = I_1$ であるから、

$$V(H) = \int_{\bar{\varepsilon}}^{\varepsilon} \left(\frac{F(I_1)}{1+\rho} + \varepsilon + H - I_1 \right) g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{F(I_1)}{1+\rho} + H - I_1$$

となる。このとき、0期の最大化問題の目的関数は、

$$X_0 - I_0 + \left(\frac{1+r}{1+\rho} - 1 \right) L_0 + \frac{1}{1+\rho} \frac{F(I_1)}{1+\rho} - I_1 + \frac{F(I_0)}{1+\rho}$$

となり、 $\frac{1+r}{1+\rho} - 1 < 0$ であるから、

流動性への投資はなく、制約条件から0期の保有現金が $X_0 \geq \tilde{I}_0$ のときは \tilde{I}_0 だけ設備投資され、残金は配当される。 $X_0 \leq \tilde{I}_0$ のときは、 X_0 はすべて設備投資に回されることがわかる。

次に、KMSは流動性投資の収益率の大きさ（ r 、ここではまとまりがあるので、 $1+r$ で計算している）がどのように流動性投資額に影響するか検討している。他の条件は変わらないとして、流動性投資の収益率が上がれば会社は流動性投資を増やすであろう、というのは、直観的にはごく自然な推論であるが、解析的に証明するのは難しい。KMSでは、解析的に証明できず、シミュレーションをおこなって確かめたとしている。

流動性への投資がある $\tilde{I}_0 \leq X_0$ に限定し、さらに $X_0 \leq \tilde{I}_0 + \tilde{L}_0$ の場合は、 $L_0 = X_0 - \tilde{I}_0$ である。

$\tilde{I}_0 = F'^{-1}(1+r)$ であり、 $\frac{d\tilde{I}_0}{d(1+r)} = \frac{1}{F''(F'^{-1}(1+r))} < 0$ であるので、流動性投資の収益率が上

流動性投資の収益率が上がれば、流動性投資は増える。

内点解で最大値が与えられる場合、最適な流動性への投資額は、前節の記法を使えば、

$$L_0 = \frac{\varphi(1+r)}{1+r} \text{ と表せる。そこで、 } \frac{d\tilde{L}_0}{d(1+r)} = \frac{(1+r)\varphi'(1+r) - \varphi(1+r)}{(1+r)^2}$$

となる。前節で証明し

たように、 $\varphi'(1+r) > 0$ ではあるが、もちろんこれだけの条件では、流動性投資の収益率が上がれば流動性への投資が増える、とはいえない。この式からでは、 $\varphi(1+r)$ が十分小さければといえる。KMSは、同じことだが、 \tilde{L}_0 が十分小さければと書いている。ただ \tilde{L}_0 は内生変数であるので、気持ちの悪い書き方ではある。

内点解で最大値が与えられる条件は、 $X_0 - \tilde{I}_0 \geq \frac{\varphi(1+r)}{1+r} = \tilde{L}_0 \geq 0$ であるから、 $\varphi'(1+r) + \tilde{L}_0 - X_0 \geq 0$ であれば、すなわち $X_0 (\geq \tilde{I}_0)$ が十分小さければ、 $\frac{d\tilde{L}_0}{d(1+r)} \geq 0$ といえる。

4. KMS モデルの問題点とその拡張について

分析結果からわかるように、0期の現金保有に依存して財務政策が決まってくるが、0期の資金調達や既存設備を導入しないとあまり興味あるモデルとはいえない。そこで、0期に借入や資本設備を入れたいが、実はKMSの設定では意味がない。というのも、既存設備があったとして、減価償却率が1になっているので、前期の設備はすべて流動化されて現金になっていると考えることができるからである。さらに1期目の借入も短期のものだけしか考えていないので、その期の利益から債務を支払った残りとしての0期の保有現金と考えることができる。

借入にかかわっては、たとえ短期の負債を導入するにしても、借金が多く0期の現金残高がマイナスとして、0期の資金調達の必要性を繰り返すことはできる。また、長期の負債を想定して、0期に将来の債務を入れ込むことができる。

さまざまな問題点がないが、KMSモデルの本質的な問題点は、まずは減価償却率1の設備投資という設定ではないかと考えている。KMSの設定では、設備投資と流動性投資の違いは、前者は可変的、後者は固定的な収益率の投資機会という点でしかない。これで流動性と固定的な投資機会の違いをモデル化しているのか、という疑問がわいてくる。設備投資は、収益率が高い代わりにいったん投資したらそのストックの調整がしにくい、あるいは調整に費用がかかり、一方で流動性は、収益率は低いとその有り高の調整が自由であるというところに特徴がありはしないか、ということである。そこで、まずこの方向での拡張モデルについて検討している。

ところで、外部資金調達に費用がかかるということは、内部資金と外部資金の違いが出てくるということである。この点、1期目の意思決定にかかわり、簡単なベッキング・オーダー論の導出をおこなうことができた。この内外の資金の区別から、さまざまな現実的な財務政策を説明できる。財務論の教科書では、まず資金調達にかかわり内部金融と外部金融の源泉を説明するが、MMの完全な金融資本市場の世界では意味がない。さらにまた、教科書では流動性管理や運転資本管理を説明するが、これもMM的な世界では意味がない。必要なら、いつでも摩擦なしに資金調達でき、内部に収益性の低い流動性を保有しておく意味がないからである。外部資金調達に摩擦を伴うモデルは、これらのごく現実的な財務活動を説明できるのである。

ところで、設備投資の意思決定にかかわり回収期間法というのが知られているが、理論的には意味のない方法だと言われることが多いが、そうではない。外部資金調達に摩擦があれば、会社の内部資金が意味を持つてくるということである。会社はさまざまな投資機会の集合であり、会社内で他の機会が獲得した資金を会社内の他の機会へ融通するのは普通である。他の条件が同じであれば、早く資金が回収できる投資機会が内部資金の観点からはいいわけである。特に新規投資機会の発生が多く予想される企業ではそう言える。回収期間法の意義はここにかかわる。実際、成長産業では、短い回収期間の投資が志向される。以下で、この点にかかわるモデル化を提示している。

4-1. 設備投資の摩擦を入れ込む

まず設備の減価償却率を0とする。そうすると、投資した設備がそのまま次期に残ってしまう。そのためにその処理を考えなければならない。特に最終期である2期目はその売却を考えなければならない。そこで、設備の売却価格を $p (< 1)$ としておく。0期の投資の不確実性の実現値を観察して、最適な設備量が決まるから、残存の設備量の差額だけの投資が必要になる。設備が過剰であれば、その売却も考えなければならない。その時の処分価格が p である。この大きさが設備の転売あるいは売却可能性という特性を表している。 $p=0$ であれば、完全に非可逆的で、設備の売却価値は0ということである。逆に $p=1$ であれば、完全に可逆的で、買った価格で設備を売却できる。これが設備の「流動性」の特性を表すと考えることができる。

若干の解釈上の処理であるが、以下の設定では設備からの収益は確実として、 X_0, ε_t を既存資産からのキャッシュ・フローとしておく。この方が設備投資や流動性投資が会社の全体としての内部資金の状況にどうかかわるかという問題意識を検討するには都合がいい。 ε_t が新規投資の確率項としてもなんら変わりはない。解釈上の処理とはそういう意味である。以上を考慮したモデルの基本構造を確認すれば以下ようになる。

なお、本モデルの解析もおこなっているが、既定の枚数を大幅に超過しているので、この分析結果については、またの機会に譲りたい。

期日	0	1	2
既存設備	X_0	ε_1	ε_2
設備投資	$-I_0$	$F(I_0) - I_1(1_{(I_1>0)} + p1_{(I_1<0)})$	$F(I_0 + I_1) + p(I_0 + I_1)$
流動性	$-L_0$	$(1+r)L_0$	
調達		$(1-\xi)B_1$	$-\min\{F(I_0 + I_1) + p(I_0 + I_1) + \varepsilon_2, G\}$
配当	$D_0 = X_0 - I_0 - L_0 \geq 0$	$D_1 = F(I_0) + (1+r)L_0 + \varepsilon_1 + B_1 - I_1(1_{(I_1>0)} + p1_{(I_1<0)}) \geq 0$	$D_2 = \max\{F(I_0 + I_1) + p(I_0 + I_1) + \varepsilon_2 - G, 0\}$

設備投資とそれにかかわる摩擦を $I_1(1_{(I_1>0)} + p1_{(I_1<0)})$ で入れている。これは、実物オプション(real option)と解釈できる。 $I_1>0$ のときは、価格1を払って設備を追加購入することを表している。設備拡大は、 $\max\{I_1, 0\} = I_11_{(I_1>0)}$ と表される(コール)オプションである。この場合は、0期目の設備購入のときと同じ価格で設備を購入できると想定している。一方、設備が過剰で $I_1<0$ とするときは、価格 p で設備を売却する。設備縮小は $p\min\{I_1, 0\} = pI_11_{(I_1<0)}$ と表せ、(プット)オプションである⁽⁴⁾。2期目には、保有設備量 $I_0 + I_1$ をすべて価格 p で売却して会社は精算される。

(1) 1期目の最適問題

3-1の(1)と同様の操作をおこない、1期目の最適化問題は、

$$V_1 = \max_{I_1, B_1} \left\{ X_1 - \xi B_1 - I_1 (1_{(I_1 > 0)} + p 1_{(I_1 < 0)}) + \frac{F(I_0 + I_1) + p(I_0 + I_1)}{1 + \rho} \right\}$$

$$\text{subject to } X_1 + B_1(1 - \xi) - I_1(1_{(I_1 > 0)} + p 1_{(I_1 < 0)}) \geq 0, I_1 \geq -I_0, B_1 \geq 0$$

となる。制約条件 $I_1 \geq -I_0$ は、1期目の設備量(額)合計がマイナスにならないための条件である。

(2) 0期目の最適化問題

0期目の問題は、

$$V_0(X_0) = \max_{I_0, L_0} \left\{ X_0 - I_0 - L_0 + \frac{E_0[V_1]}{1 + \rho} \right\}$$

$$\text{subject to } X_0 \geq I_0 + L_0, I_0 \geq 0, L_0 \geq 0,$$

である。

4-2. 設備からの資金の回収期間のモデル化

Almeida et al. (2011) の回収期間のアイデアを本稿でのモデルの中で検討している。0期からの1期の投資の収益を $(1 - \lambda)F(I_0)$ 、2期目の収益を $\lambda F(I_0)$ としておく、 $\lambda = 1$ であれば、回収するのに2期間かかる投資、逆に $\lambda = 0$ であれば、資金を1期間で回収できる投資となる。 λ が大きくなると、回収期間が長くなることを意味している。モデルの構造は以下ようになる。ここでは、設備投資の摩擦は考えていない。モデルの枠組みは以下である。

期日	0	1	2
既存設備	X_0	ε_1	ε_2
設備投資	$-I_0$	$(1 - \lambda)F(I_0)$ $-I_1$	$\lambda F(I_0)$ $F(I_1)$
流動性投資	$-L_0$	$(1 + r)L_0$	
調達		$(1 - \xi)B_1$	$-\min \{\lambda F(I_0) + F(I_1) + \varepsilon_2, G\}$
配当	$D_0 =$ $X_0 - I_0 - L_0 \geq 0$	$D_1 =$ $(1 - \lambda)F(I_0) + (1 + r)L_0 + \varepsilon_1 +$ $(1 - \xi)B_1 - I_1 \geq 0$	$D_2 =$ $\max \{\lambda F(I_0) + F(I_1) + \varepsilon_2 - G, 0\}$

そこで、1期目の最適化問題は、

$$V_1 = \max_{I_1, B_1} \left\{ X_1 - \xi B_1 - I_1 + \frac{\lambda F(I_0) + F(I_1)}{1 + \rho} \right\}$$

$$\text{subject to } X_1 + (1 - \xi)B_1 - I_1 \geq 0, I_1 \geq 0, B_1 \geq 0$$

となる。ただし、 $X_1 = (1 - \lambda)F(I_0) + (1 + r)L_0 + \varepsilon_1$ である。ここでは、 ρ が0ではないので、

投資案件の現在価値は、 $(1 - \lambda)F(I_0) + \frac{\lambda F(I_0)}{1 + \rho} = ((1 - \lambda) + \frac{\lambda}{1 + \rho})F(I_0)$ となり、キャッシュ・

フローのタイミングが割引現在価値に関係してくるので、Almeida et al. のようには、投資案件の現在価値が $F(I_0)$ で同じではない。したがって、厳密には回収期間だけの問題ではないことは注意しなければならない。

0 期目の問題は、形式的には変わらず、

$$V_0(X_0) = \max_{I_0, L_0} \left\{ X_0 - I_0 - L_0 + \frac{E_0[V_1]}{1 + \rho} \right\}$$

$$\text{subject to } X_0 \geq I_0 + L_0, I_0 \geq 0, L_0 \geq 0,$$

となる。

5. むすび

外部調達に摩擦がある状況での財務動学モデルについて、2 期間モデルを簡単に展望した後、KMS モデルを詳細に検討した。摩擦を伴う動学モデルは解法するのが難しく、本研究ノートでは分析の一般性さらに拡張性を考慮した一つのアプローチを展開したものと考えている。具体的には、オプション的表現を伴った関数の解析の仕方、さらに直感的にできるように分析図をいくつか提示した。最後に、KMS モデルの問題点に触れながら拡張方向としては、設備投資の流動性にかかわる特性を導入する可能性のみを検討した。

再度になるが、次の点強調しておきたい。すなわち完全市場を前提に、投資決定だけを取り出して NPV 法や IRR 法を議論するのが一般的であるが、外部資金調達に摩擦を伴う（将来のオプションを伴う動学的）状況では、これはミスリーディングである。そもそも、NPV 法や IRR 法は、完全市場のもとでの収益性についての単に計算の仕方の違いにすぎず、したがって、どちらが優位かという問題でもなく、IRR の問題点といわれるものも IRR を NPV と整合的に定義できていないだけの問題である。これについては、久保（2007）を参照いただきたい。これも前述したが、完全市場を前提に回収期間法がおかしいというのは筋違いもいいところである。いずれにしても調達、投資に摩擦を状況では、流動性投資、設備投資、調達や配当政策は一体となって分析しなければならない。この方面の統一的理論（unified theory）なる論考もすでにいくつか出てきている。英文では先に引用した Gamba and Triantis（2007）や Bolton et al.（2009）（2011）があり、邦文でも小林（2012）がある。

注

（注 1）Fisher の分離定理と、完全市場と取引費用がある場合についての説明は、堀内（1993）p.35 あたりを参照。

（注 2）この $V(H)$ は、以下のように、実物オプション的に表現して、将来何もしないとする投資案件の静学的な価値と将来オプションの価値に分解しておいてもいい。

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \left\{ \frac{F(\varepsilon + H)}{1 + \rho} + \left(\frac{F(I_1^*)}{1 + \rho} + \varepsilon + H - I_1^* - \frac{F(\varepsilon + H)}{1 + \rho} \right) 1_{(\varepsilon + H - I_1^* > 0)} + \left(\frac{F(\hat{I}_1)}{1 + \rho} + \frac{\varepsilon + H - \hat{I}_1}{1 - \xi} - \frac{F(\varepsilon + H)}{1 + \rho} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& 1_{(\varepsilon+H-I<0)} \Big\} g(\varepsilon) d\varepsilon \\
&= \int_{\varepsilon}^{\bar{\varepsilon}} \left\{ \frac{F(\varepsilon+H)}{1+\rho} g(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\
&+ \int_{\varepsilon}^{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{F(I_1^*)}{1+\rho} + \varepsilon + H - I_1^* - \frac{F(\varepsilon+H)}{1+\rho} \right) 1_{(\varepsilon+H-I>0)} g(\varepsilon) d\varepsilon \\
&+ \left. \int_{\varepsilon}^{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{F(\hat{I}_1)}{1+\rho} + \frac{\varepsilon+H-\hat{I}_1}{1-\xi} - \frac{F(\varepsilon+H)}{1+\rho} \right) 1_{(\varepsilon+H-I<0)} g(\varepsilon) d\varepsilon \right\}
\end{aligned}$$

(注3) 例えば、パラメータ t に依存した何らかのコール・オプションである $\max\{x-f(t), 0\}$ があったとする。定義関数を用いると、これは $(x-f(t))1_{(x-f(t)>0)}$ と表すことができる。これの t に関する微分は、関数 $(x-f(t))$ と関数 $1_{(x-f(t)>0)}$ の積の微分とみなして計算する。定義関数の微分は、デルタ関数 $\delta_{(x-f(t)=0)}$ であるとする、 $-f'(t)1_{(x-f(t)>0)} + (x-f(t))\delta_{(x-f(t)=0)}$ であり、さらに $(x-f(t))\delta_{(x-f(t)=0)} = 0$ であるから、 $-f'(t)1_{(x-f(t)>0)}$ とできる。デルタ関数の積分に関しては、 $\int_a^b f(x)\delta_{(x=c)}dx = f(c)$ と計算している。

本文で明らかにしたように調達に摩擦を伴う動学モデルはオプションの中にパラメータを伴った微分や積分を計算する必要がある。区別してやれば微分も積分もできないことはないが、非常に煩雑である。区別せずに処理する工夫がここでの定義関数やデルタ関数の利用である。デルタ関数の性質については、ネットでは、例えば、<http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html> を参照。超関数の意味での解析は、数学のしかるべき成書を参考されたい。

(注4) 2期間モデルの中での実物オプションについては、Abel et al. (1996) が参考になる。通常のNPV法、実物オプションが入った投資決定問題、さらにTobinのQ理論との関係を明確に整理している。

参考文献

- Abel, A., Dixit, A., Eberly, J., and Pindyck, R. (1996), "Options, the Value of Capital, and Investment," *The Quarterly Journal of Economics*, vol.
- Almeida, H., Campello, M., and Weisbach, M. (2002), "Corporate Demand for Liquidity," NBER working paper, No.9253.
- Almeida, H., Campello, M., and Weisbach, M. (2004), "The Cash Flow Sensitivity of Cash," *The Journal of Finance*, vol.59.
- Almeida, H., Campello, M., and Weisbach, M. (2011), "Corporate Financial and Investment Policies when Future Financing is not Frictionless," *Journal of Corporate Finance*, vol.17.
- Bolton, P., Chen, H., and Wang, N. (2009), "A Unified Theory of Tobin's q, and Corporate Investment, Financing, and Risk Management," *The Journal of Finance*, vol.66.
- Bolton, P., Chen, H., and Wang, N. (2011), "Market Timing, Investment, and Risk Management," *Journal of Financial Economics*, vol.109.
- Donaldson, G. (1986), *Strategy for Financial Mobility*, Harvard Business School Press.
- Froot, K., Scharfstein, D., and Stein, J. (1992), "Risk Management: Coordinating Corporate Investment and Financing Policies," NBER working paper, No.4084.
- Gamba, A., and Triantis, A. (2008), "The Value of Financial Flexibility," *The Journal of Finance*, vol.63.
- Graham, J., and Harvey, C. (2001), "The Theory and Practice of Corporate Finance: Evidence from the Field," *The Journal of Financial Economics*, vol.60.

- Kim, G., Mauer, D., and Sherman, A. (1998), "The Determinants of Corporate Liquidity : Theory and Evidence," *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.33.
- 小林孝雄 (2012) 「『摩擦』とファイナンス－ファイナンスのパラダイムシフト予見」『証券アナリストジャーナル』第 50 巻第 10 号。
- 久保俊郎 (2007) 「投資案選択基準再考」『経営財務研究』第 27 巻第 2 号。
- 堀内昭義 (1993) 『金融論』東京大学出版会。